RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 maggio 1918.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra certe forme particolari dell'elemento lineare sferico.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. In una recente Memoria del prof. Calapso [1] è richiamata l'attenzione sopra una classe di superficie che hanno a comune colle superficie isoterme l'immagine sferica delle linee di curvatura e sono caratterizzate dalla proprietà che pei coefficienti E, G del loro ds^2, riferito alle linee di curvatura (u, v)

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

sussiste la relazione

$$G \pm E = ar^2, \tag{1}$$

dove a indica una costante, ed r rappresenta la distanza del punto (u, v) mobile sulla superficie da un punto fisso nello spazio [2].

Nella presente Nota vogliamo trovare tutti i modi nei quali una *sfera* può figurare come superficie della classe (1). Si vedrà che questo problema

[1] *Intorno agli inviluppi di sfere sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura* (Annali di matematica, serie III, tomo XXVI (1917), pp. 151-190).

[2] Osservo che già in ricerche ormai antiche si presentarono classi di queste superficie, se anche la proprietà espressa dalla (1) non vi si trova esplicitamente avvertita. Così nella mia Memoria: *Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche* (Annali di matematica, 1896), per le superficie che sono ivi indicate col nome di Σ *paraboliche* ha luogo appunto la proprietà $G + E = ar^2$. Più recentemente nella Memoria inserita nel tomo XXIV (1915) le superficie studiate ai §§ 13, 15, ed ivi associate in *famiglie di Lamé*, appartengono ancora alla classe (1).

di determinare tutti i sistemi ortogonali (u, v) sulla sfera pei quali si verifica la (1), si connette al problema della deformazione delle quadriche rotonde, aventi un fuoco principale nel punto fisso F da cui è contata la distanza r, e i due problemi si equivalgono perfettamente.

Osserverò ancora di passaggio che ai sistemi ortogonali sferici del tipo (1) sono applicabili le trasformazioni di Ribaucour in geometria sferica e le trasformazioni delle deformate delle quadriche rotonde che ne derivano sono precisamente le così dette G_k, che furono risolute da Calapso nelle loro componenti elementari B_k. Più in generale questo avviene pei sistemi ortogonali della sfera che corrispondono ai sistemi coniugati permanenti delle quadriche *generali* nelle ricerche fondamentali di Calapso [1].

2. Per risolvere la questione proposta ricorriamo ad alcuni risultati la cui dimostrazione viene data in un lavoro che si sta ora pubblicando nelle Memorie di questa R. Accademia [2].

Si consideri una superficie S qualunque e la sua *polare reciproca* $\overline{S}$ rispetto ad una sfera il cui centro indichiamo con F. Alle linee di curvatura di S corrisponde sulla polare $\overline{S}$ quel sistema coniugato che si projetta da F sulla sfera in un sistema ortogonale, lo diciamo *il sistema coniugato d'apparenza ortogonale* (visto da F). Ora suppongasi che la S appartenga alla classe (1), e considerando dapprima il caso del segno inferiore, abbiasi

$$G - E = ar^2, \tag{2}$$

la distanza r essendo contata da F. La condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è che sulla polare reciproca $\overline{S}$ il detto sistema coniugato, ortogonale apparente da F, sia *permanente* in una deformazione reale finita della $\overline{S}$ considerata come flessibile ed inestendibile. Si aggiunga che, ove la $\overline{S}$ si faccia rotolare sulla corrispondente deformata, il punto satellite F descrive una superficie isoterma [3].

Per l'altro caso, in cui vale nella (1) il segno superiore e si ha

$$G + E = ar^2, \tag{3}$$

sussiste ancora un risultato analogo. Ma in tal caso la deformazione della $\overline{S}$, in luogo di essere reale, è puramente immaginaria, vale a dire i corrispondenti valori dei coefficienti della seconda forma fondamentale nella deformata sono immaginarii puri: iD, iD'' $(iD' = 0)$. La proprietà può porsi nuova-

[1] Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo 16 (1902) e Annali di matematica tomo 19, ser. 3ª (1912).

[2] *Ricerche sulle congruenze di sfere e sul rotolamento di superficie applicabili* (ved. i §§ 54, 55 della Memoria).

[3] Cfr. la Nota: *Sulla generazione per rotolamento delle superficie isoterme* (questi Rendiconti, novembre 1915).

mente sotto forma reale ricorrendo al teorema di Darboux sui sistemi ciclici. Esiste infatti una tripla infinità di congruenze normali di circoli tracciati nei piani tangenti di $\bar{S}$ e pei quali alle linee di curvatura delle superficie ortogonali ai circoli corrisponde su $\bar{S}$ il detto sistema coniugato (u, v), che diremo per ciò un *sistema coniugato ciclico*.

Se ne conclude che la ricerca delle superficie S della classe (2) equivale a quelle delle superficie $\bar{S}$ (loro polari reciproche) che posseggono un sistema coniugato *permanente* d'apparenza ortogonale. Similmente la ricerca delle superficie S della classe (3) equivale a quella delle superficie $\bar{S}$ dotate di un sistema coniugato *ciclico* d'apparenza ortogonale.

3. Applichiamo queste osservazioni generali al caso in cui la superficie S sia una sfera. La polare reciproca $\bar{S}$ della sfera rispetto ad una sfera col centro F in un punto dello spazio è allora una quadrica rotonda Q avente in F un fuoco principale: precisamente Q è un paraboloide rotondo se F cade sulla sfera S, un ellissoide (allungato) se F è interno, un iperboloide (a due falde) quando F è esterno. Di più nel caso attuale *tutti* i sistemi coniugati di Q si cangiano sulla sfera S in sistemi ortogonali (e viceversa). Dunque: *per ottenere tutti i sistemi ortogonali sferici della classe* (2) *basta projettare dal fuoco* F *sulla sfera i sistemi coniugati permanenti della quadrica* Q.

Similmente i sistemi sferici della seconda classe (3) si hanno projettando i sistemi coniugati *ciclici* della quadrica Q sulla sfera (1).

Resta così dimostrato che in effetto la ricerca dei sistemi ortogonali sferici in discorso equivale al problema della deformazione delle quadriche rotonde.

È interessante osservare che se il fuoco F non cade sulla sfera, ogni ds'^2 sferico pel quale sussiste la (1) soddisfa *in doppio modo* a questa condizione. Poichè infatti se F′ è il coniugato armonico di F sul raggio OF ed r' indica la relativa distanza del punto (u, v) della sfera da F′, sussiste la relazione elementare $\frac{r}{r'} = \text{cost}$, e la (1) può anche scriversi

$$G \pm E = a' r'^2 \quad (a' \text{ costante}).$$

Ne segue che le due quadriche rotonde Q, Q′ polari reciproche della sfera S

(1) Si osservi che se, in particolare, F cade nel centro della sfera si ha $r = \text{cost}$ ed ai corrispondenti sistemi sferici si può dare la forma

$$ds'^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2$$

o l'altra

$$ds'^2 = \operatorname{sen}^2\theta\, du^2 + \cos^2\theta\, dv^2,$$

ciò che riconduce a risultati ben noti.

rispetto a sfere coi centri in F, F' si corrispondono in una tale omografia che i sistemi coniugati permanenti di Q si cangiano in quelli permanenti di Q', e così pure quelli coniugati ciclici negli omologhi. Le due quadriche Q, Q' sono dunque un ellissoide allungato ed un iperboloide a due falde *coniugati in deformazione*, secondo la trasformazione H di cui al cap. V, vol. III delle *Lezioni* (cfr. § 72, ivi).

4. Vogliamo ora trovare effettivamente le forme:

$$ds'^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

dell'elemento lineare sferico soddisfacente alla (2) deducendole, come sopra si è spiegato, dalle trasformazioni D_m di Darboux delle superficie a curvatura media costante. Un tale sistema (u, v) dà altresì l'immagine di Gauss delle linee di curvatura di un'altra superficie isoterma legata alla superficie a curvatura media costante dalla trasformazione T_m associata alla D_m di Darboux [1].

Se il ds^2 della superficie a curvatura media costante H si scrive

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2),$$

per le curvature principali $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$ si può prendere

$$\frac{1}{r_1} = \frac{H + e^{-2\theta}}{2}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{H - e^{-2\theta}}{2},$$

mentre θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \frac{1}{4}(H^2 e^{2\theta} - e^{-2\theta}) = 0.$$

Una trasformazione D_m della superficie S a curvatura media costante è definita dalle funzioni trasformatrici λ, μ, w, φ assoggettate a soddisfare al sistema lineare omogeneo:

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = m(He^{\theta} + e^{-\theta})\,\varphi - \left(\dfrac{He^{\theta} - e^{-\theta}}{2} + 2me^{\theta}\right) w - \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\,\mu, \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\,\lambda, \quad \dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{He^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\,\lambda, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = e^{\theta}\lambda \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\,\mu, \quad \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = m(He^{\theta} - e^{-\theta})\,\varphi - \left(\dfrac{He^{\theta} + e^{-\theta}}{2} + 2me^{\theta}\right) w - \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\,\lambda, \\ \dfrac{\partial w}{\partial v} = \dfrac{He^{\theta} + e^{-\theta}}{2}\,\mu, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = e^{\theta}\mu \end{cases}$$

[1] Cfr. la Memoria: *Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme* [Annali di mat., ser. 3ª, tomo XII (1905)] e la Nota in questi Rendiconti già citata al n. 2.

ed all'equazione quadratica accessoria

$$(A^*) \qquad \lambda^2 + \mu^2 = 2m\mathrm{H}\varphi^2 - 4m\varphi w - w^2 ,$$

della quale basta tener conto ai limiti.

La superficie Σ trasformata della S a curvatura media costante H, per la trasformazione T_m associata alla D_m, ha l'elemento lineare

$$\overline{ds^2} = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}(du^2 + dv^2)$$

e le curvature principali

$$\frac{1}{\varrho_1} = w - \frac{\mathrm{H} + e^{-2\theta}}{2}\varphi \quad , \quad \frac{1}{\varrho_2} = w - \frac{\mathrm{H} - e^{-2\theta}}{2}\varphi ,$$

onde per il ds'^2 della sua immagine sferica abbiamo

$$ds'^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

con

$$(4) \qquad \mathrm{E} = \frac{\left(e^{\theta} w - \dfrac{\mathrm{H}e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\varphi\right)^2}{\varphi^2} \quad , \quad \mathrm{G} = \frac{\left(e^{\theta} w - \dfrac{\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}\varphi\right)^2}{\varphi^2} ,$$

e per ciò

$$(5) \qquad \mathrm{G} - \mathrm{E} = \mathrm{H} - 2\frac{w}{\varphi} .$$

5. Andiamo ora a verificare che il secondo membro di questa è in effetto proporzionale, per un fattore costante a, al quadrato r^2 della distanza del punto (u, v) della sfera a un punto fisso nello spazio. Denotando con X, Y, Z le coordinate del punto (u, v) della sfera e prendendo il punto fisso nel punto $(0, 0, c)$ dell'asse Oz abbiamo

$$(6) \qquad r^2 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + (\mathrm{Z} - c)^2 = c^2 + 1 - 2c\mathrm{Z}$$

e resta da provarsi che possiamo determinare le costanti a, c per modo che si abbia

$$(7) \qquad \mathrm{H} - 2\frac{w}{\varphi} = a(c^2 + 1) - 2ac\mathrm{Z} .$$

Per questo possiamo servirci del risultato ottenuto al § 6 dei citati *Complementi* colla formola

$$(8) \qquad \mathrm{Z} = \frac{1}{\sqrt{2m(2m + \mathrm{H})}}\left(\frac{w}{\varphi} + 2m\right) \text{ (1)},$$

(1) Si avverte che per la realità della trasformazione deve essere $2m(2m + \mathrm{H}) > 0$.

e dalla (7) abbiamo per determinare a, c le due equazioni

$$a(c^2+1) = 4m + H$$
$$ac = \sqrt{2m(2m+H)},$$

indi per c l'equazione quadratica

$$c^2 - \frac{4m+H}{\sqrt{2m(2m+H)}}\, c + 1 = 0.$$

Le due radici sono

$$c_1 = \sqrt{\frac{2m+H}{2m}} \quad , \quad c_2 = \sqrt{\frac{2m}{2m+H}},$$

coi corrispondenti valori

$$a_1 = 2m \quad , \quad a_2 = 2m + H$$

pel moltiplicatore a. Come si vede i due punti $(0, 0, c_1)$, $(0, 0, c_2)$ sono coniugati armonici rispetto alla sfera, conformemente alle osservazioni del n. 3; essi coincidono nel punto $(0, 0, 1)$ della sfera quando la superficie S è ad area minima ($H = 0$), e la quadrica Q diventa un paraboloide rotondo.

6. Senza invocare la formola (8) sulla quale si è fondata la verifica, possiamo anche stabilirla direttamente e confermare in pari tempo che l'elemento lineare dato dalle (4) appartiene alla sfera unitaria. Così resterà nuovamente stabilito che sono questi gli elementi lineari sferici soddisfacenti alla condizione (2). Poniamo per un momento

$$\Phi = \frac{w}{\varphi} \tag{9}$$

e calcoliamo i due parametri differenziali $\Delta_1\Phi$, $\Delta_2\Phi$ rispetto al ds^2 dato dalle (4). Derivando la (9), con riguardo alle (A), abbiamo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \frac{(He^{\theta} - e^{-\theta})\varphi - 2e^{\theta}w}{2\varphi^2}\lambda \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial v} = \frac{(He^{\theta} + e^{-\theta})\varphi - 2e^{\theta}w}{2\varphi^2}\mu, \tag{10}$$

e per ciò

$$\Delta_1\Phi = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 = \frac{\lambda^2+\mu^2}{\varphi^2},$$

indi a causa della (A*)

$$\Delta_1\Phi = 2mH - 4m\Phi - \Phi^2 = 2m(2m+H) - (\Phi + 2m)^2. \tag{11}$$

Ora calcoliamo

$$\Delta_2\Phi = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\right\},$$

che per le (10) e per le (4) diventa

$$(12)\qquad \Delta_2\Phi = \frac{2}{(He^{\theta} - e^{-\theta} - 2e^{\theta}\Phi)\,(He^{\theta} + e^{-\theta} - 2e^{\theta}\Phi)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{(He^{\theta} + e^{-\theta})\,\varphi - 2e^{\theta} w}{\varphi^2}\,\lambda\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{(He^{\theta} + e^{-\theta})\,\varphi - 2e^{\theta} w}{\varphi^2}\,\mu\right]\right\}.$$

Calcolando l'espressione

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{(He^{\theta} + e^{-\theta})\,\varphi - 2e^{\theta} w}{\varphi^2}\,\lambda\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{(He^{\theta} - e^{-\theta})\,\varphi - 2e^{\theta} w}{\varphi^2}\,\mu\right]$$

mediante le (A), si trova dapprima:

$$\Omega = \left\{(He^{\theta} + e^{-\theta}) - 2e^{\theta}\Phi\right\} \cdot \left\{ m\,(He^{\theta} + e^{-\theta}) - \left(\frac{He^{\theta} - e^{-\theta}}{2} + 2me^{\theta}\right)\Phi\right\} +$$

$$+ \left\{(He^{\theta} - e^{-\theta}) - 2e^{\theta}\Phi\right\} \cdot \left\{ m\,(He^{\theta} + e^{-\theta}) - \left(\frac{He^{\theta} + e^{-\theta}}{2} + 2me^{\theta}\right)\Phi\right\} -$$

$$- 2e^{2\theta}(H - 2\Phi)\,\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\varphi^2},$$

e siccome per la (A*)

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\varphi^2} = 2mH - 4m\Phi - \Phi^2,$$

sostituendo ed ordinando otteniamo

$$\Omega = -4e^{2\theta}\Phi^3 + 4e^{2\theta}(H - 2m)\,\Phi^2 + (e^{-2\theta} - H^2 e^{2\theta} + 8mHe^{2\theta})\,\Phi +$$

$$+ 2m(e^{-2\theta} - H^2 e^{2\theta}),$$

che si risolve nel prodotto dei due fattori

$$\Omega = -(\Phi + 2m)\,(4e^{2\theta}\Phi^2 - 4e^{2\theta}H\Phi + H^2 e^{2\theta} - e^{2\theta}),$$

il secondo dei quali è precisamente il denominatore

$$(He^{\theta} - e^{-\theta} - 2e^{\theta}\Phi)\,(He^{\theta} + e^{-\theta} - 2e^{\theta}\Phi)$$

nella (12). Otteniamo quindi, insieme alla (11), l'altra formola

$$\Delta_2\Phi = -2(\Phi + 2m),$$

da cui

$$-\frac{\Delta_2\Phi}{\Delta_1\Phi} = \frac{2(\Phi + 2m)}{(\Phi + 2m)^2 - 2m(2m + H)},$$

e in conseguenza

$$-\int \frac{\Delta_2\Phi}{\Delta_1\Phi}\,d\Phi = -\log\left\{2m(2m + H) - (\Phi + 2m)^2\right\}.$$

Dal teorema di Lie sui sistemi isotermi (*Lezioni*, vol. I, § 47) segue che la espressione

$$(13)\quad d\Psi = \frac{(He^{\theta} - e^{-\theta})\varphi - 2e^{\theta} w}{2\varphi^2} \frac{\mu\, du}{2m(2m+H) - (\Phi + 2m)^2} - \frac{(He^{\theta} + e^{-\theta})\varphi - 2e^{\theta} w}{2\varphi^2} \frac{\lambda\, dv}{2m(2m+H) - (\Phi + 2m)^2}$$

è un differenziale esatto. Ed ora se il ds^2 dato dalle (4) si riferisce alle linee $\Phi = \text{cost}$ ed alle loro trajettorie ortogonali $\Psi = \text{cost}$, siccome si ha per la (11)

$$\Delta_1 \Phi = 2m(2m + H) - (\Phi + 2m)^2$$

e per le (4) e per le (13)

$$\Delta_1 \Psi = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\varphi^2} \cdot \frac{1}{(\Delta_1 \Phi)^2} = \frac{1}{\Delta_1 \Phi},$$

essendo inoltre

$$F(\Phi, \Psi) = 0,$$

risulterà (*Lezioni*, vol. I, § 44):

$$ds'^2 = \frac{d\Phi^2}{\Delta_1 \Phi} + \Delta_1 \Phi \,.\, d\Psi^2,$$

cioè

$$ds'^2 = \frac{d\Phi^2}{2m(2m+H)(\Phi+2m)^2} + [2m(2m+H) - (\Phi+2m)^2]\, d\Psi^2.$$

Pongasi ora

$$(14)\quad \Phi + 2m = \sqrt{2m(2m+H)} \,.\, \text{sen}\,\alpha$$
$$\Psi \sqrt{2m(2m+H)} = \beta,$$

e il ds'^2 sarà ridotto all'ordinaria forma dell'elemento lineare della sfera unitaria

$$ds'^2 = d\alpha^2 + \text{sen}^2\alpha\, d\beta^2,$$

riferito a coordinate geografiche α, β. Ed avendosi qui $Z = \text{sen}\,\alpha$, la formola (14) si riduce così alla (8), la quale resta per tal modo nuovamente stabilita.

7. Trattiamo da ultimo di un problema analogo a quello del n. 1 quando ai coefficienti E, G dell'elemento lineare sferico s'imponga l'altra condizione

$$(15)\quad G \pm E = az^2,$$

dove ora con z indichiamo la distanza del punto (u, v) della sfera Σ *da un*

piano fisso π. Una semplice considerazione di metrica non-euclidea riconduce subito il nuovo problema alla teoria delle superficie a curvatura costante. Prendasi infatti il piano π come piano limite di una metrica (iperbolica) di Poincaré (1) definita da

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2} .$$

In questa metrica Σ rappresenta ancora una sfera; questa però è a centro proprio se π non incontra Σ, un'orisfera quando π è tangente a Σ, in fine una sfera a centro ideale se π attraversa Σ, e a seconda dei tre casi la curvatura assoluta di Σ in metrica iperbolica è positiva, nulla o negativa. Ma pel ds^2 di Σ in questa metrica

$$ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

la (15) si muta manifestamente nell'altra

$$g \pm e = \text{cost} ,$$

che corrisponde a dare al ds^2 l'una o l'altra delle due forme:

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \text{sen}^2\theta\, dv^2$$
$$ds^2 = \cosh^2\theta\, du^2 + \text{senh}^2\theta\, dv^2 .$$

Il problema equivale adunque appunto alla ricerca delle superficie a curvatura costante negativa, o positiva, e nel caso particolare di π tangente a Σ si risolve coll'integrazione dell'equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} \mp \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0 .$$

(1) Cfr. le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, § 187 segg.

Morfologia vegetale. — *Sulla costituzione e sulla distribuzione dei fiori nelle Phillyrea.* Nota preventiva del Socio R. Pirotta e della Sig.ra D. Bruno Ballerini.

Mentre ci riserviamo di esporre particolareggiatamente gli interessanti fatti da noi osservati intorno alla morfologia e alla biologia fiorale delle *Phillyrea*, crediamo intanto opportuno far conoscere brevemente quanto abbiamo osservato intorno alla costituzione e alla distribuzione dei fiori in queste piante.

Lasciando per ora da parte la dibattuta questione della autonomia delle specie nostrali di *Phillyrea*, che alcuni riuniscono tutte in una specie unica polimorfa, dobbiamo però dichiarare che le nostre osservazioni furono fatte sopra numerosi individui appartenenti a quelle forme che si raccolgono dai sostenitori della autonomia delle specie sotto il nome di *Phillyrea media* L.

Abbiamo condotte le nostre ricerche direttamente su piante vive delle pendici boscose delle colline della Farnesina sotto Monte Mario e delle Acque Albule. Abbiamo esaminato anche materiale inviatoci dal prof. Campbell raccolto sulle dune verso il Volturno, intorno al quale del resto riferirà prossimamente il prof. Campbell medesimo.

L'esame accurato di questo materiale vivo ci ha mostrato che vi sono, in queste piante, due sorta di individui fioriferi, gli uni monoclini, gli altri staminiferi.

Il fiore monoclino ha corolla giallo-verdastra o bianca, talora tinta lievemente di roseo. Nel bottoncino gli stami hanno le antere turgide e piene di polline, mentre il pistillo non è ancora completamente sviluppato. A fiore sbocciato gli stami si presentano colle antere aperte e i sacchi pollinici quasi vuoti, perchè il polline che era già maturo nel bocciolo, esce immediatamente. Lo stilo si allunga e i lobi dello stigma che diventano turgidi giallo-verdastri e anche segnati di rosso nel dorso, divaricano portando talora già qualche granello di polline; ma ne sono privi di regola, divaricando dopo che il polline è già fuoruscito, ossia dopo qualche tempo dalla apertura del fiore. Contemporaneamente al divaricarsi dei lobi dello stimma divergono anche gli stami e le antere si rovesciano all'infuori, mentre pure i lobi della corolla al fondo della quale stanno attaccati i due stami, si rovesciano all'infuori.

In alcuni casi però la corolla appassisce man mano, ma rimane persistente, cosicchè se ne osservano ancora le tracce nel frutto abbastanza adulto; più spesso invece l'intera corolla cogli stami si distacca e cade e

rimane allora soltanto il giovanissimo frutto circondato dal calice sempre persistente.

Non appaiono notevoli differenze esteriori tra il fiore monoclino e quello staminifero, quando essi sono in bottone. Le antere sono molto turgide e piene di polline nel fiore chiuso come nella forma monoclina. Quando però il fiore è sbocciato non si osserva traccia manifesta del pistillo. Soltanto quando si divarichino considerevolmente gli stami o meglio quando si stacchi completamente la corolla, che del resto è facilmente decidua e porta con sè gli stami, si può osservare coll'aiuto della lente, più o meno facilmente, una piccolissima sporgenza nerastra che da sola rappresenta tutto intero il pistillo. Infatti la ricerca anatomica dimostra che non vi è il più piccolo accenno a logge e ad ovuli.

In questi fiori staminiferi la caduta della corolla avviene prestissimo ed è quasi sempre seguìta anche dalla caduta del calice, cosicchè all'epoca della sfioritura si osservano individui che non presentano traccia alcuna di fiore o di sue parti.

Non possiamo stabilire con precisione quale sia il rapporto numerico tra individui monoclini e staminiferi poichè, avendo noi limitate le nostre osservazioni a un certo numero di piante vive nelle due località intorno a Roma sopra ricordate e a un certo numero di esemplari da erbario, abbiamo ottenuti risultati non concordanti. Infatti la ricerca su esemplari secchi degli erbarii dell'Istituto Botanico di Roma ci ha dato il seguente risultato: fiori monoclini 28, fiori staminiferi 25, un numero cioè circa eguale degli uni e degli altri. Il computo fatto sugli esemplari dell'Erbario centrale di Firenze, cortesemente comunicatici dal chiaro collega prof. Baccarini, diede invece: fiori monoclini 73; fiori staminiferi 41, vale a dire circa il doppio di individui monoclini. Per le piante vive questo rapporto numerico è risultato in un computo fatto alle Acque Albule di circa il doppio di esemplari staminiferi in confronto di quelli monoclini, il rovescio cioè di quanto si era trovato negli esemplari dell'Erbario di Firenze; e in un altro computo fatto alla Farnesina è risultato, per 62 esemplari, di 29 monoclini e 33 staminiferi, cioè un numero pressapoco uguale degli uni e degli altri, come negli esemplari dell'Erbario di Roma. Occorrono dunque a questo riguardo nuove e più accurate indagini.

Le due sorta di individui sopra brevemente descritte, monoclini e staminiferi, sono ben definite. Lo studio accurato che noi abbiamo fatto di numerosi individui monoclini, ci ha però condotti a trovarne alcuni che ci permettono di stabilire che la forma monoclina sia primaria e la staminifera derivata. Infatti alcuni fiori che a primo sguardo appariscono monoclini perfetti, mostrano, ad un più attento esame, che il pistillo è meno sviluppato, lo stilo è più breve e lo stimma non presenta i lobi manifesti; che hanno antere più grandi e più appariscenti di quelle dei fiori monoclini puri.

Sezionando allora gli ovarii di questi fiori, si osservano ancora due logge biovulate, ma più spesso si trova che una delle logge è appena accennata e contiene un unico ovulo schiacciato, oppure che le logge sono schiacciate entrambe ed allora con ovuli od anche senza ovuli; e finalmente si vede una traccia soltanto di cavità molto schiacciata, senza ovuli.

Sembra dunque dimostrato che la comparsa di individui prettamente staminiferi abbia avuto origine dalla continua graduale riduzione del pistillo, che perde lo stimma e lo stilo, riduce e poi perde gli ovuli, le cavità ovariche e le pareti stesse del pistillo, che finalmente del tutto scompare.

Quasi tutti gli autori consultati o non parlano affatto del modo di costituzione e di distribuzione dei fiori di queste piante, facendo però comprendere di solito che le ritengono monocline, o affermano addirittura che sono monocline.

È poi veramente curiosa l'affermazione del Clos che le *Phillyrea* (*media* e *angustifolia*) hanno fiori staminiferi e pistilliferi, cioè diclini, mai monoclini, e che questi fiori si trovano sopra individui diversi, cosicchè la pianta è dioica, mai monoica. La spiegazione di questa stranissima affermazione del valente morfologo francese sembra a noi si possa trovare nell'avere egli osservato bensì numerosi esemplari ma tutti di erbario, e specialmente nel fatto che essendo la corolla la quale porta gli stami, di regola, più o meno presto caduca, il fiore si presenta all'osservatore costituito dal solo pistillo circondato dal calice. E così è stata male interpretata dal Clos la figura del Tournefort, perchè se è vero che questi tace nel testo degli stami, li mette però nella tavola, la quale rappresenta dunque non già un fiore pistillifero, bensì un fiore monoclino dopo la caduta della corolla e con essa degli stami che sono epicorollini. Il solo autore, a nostra conoscenza, che abbia accennato, benchè incidentalmente, al vero stato delle cose, è il Gussone, che accenna a mancanza di stilo e quindi a fiori soltanto con stami.

I risultati principali di quanto siam venuti sommariamente esponendo colla presente Nota, possiamo così riassumere brevemente:

1°. La *Phillyrea media* L. è, per quanto riguarda la distribuzione dei fiori, specie pleomorfa con individui pleomorfi e precisamente per quanto riguarda lo sporofito è specie difitica, con due sorta di individui secondo il tipo androdioico, vale a dire con individui staminiferi e monoclini.

2°. La forma monoclina è primitiva, la staminifera è derivata per continua graduale riduzione del pistillo, perchè anche attualmente si incontrano individui nei quali insieme coi fiori prettamente monoclini se ne trovano altri che presentano tutti i gradi di riduzione del pistillo e delle sue parti fino alla totale scomparsa.

Fisica. — *Convertitore di correnti trifasi in correnti continue.* Nota del Corrispondente O. M. Corbino.

1. La prova fatta da molti anni con gli interruttori a getto di mercurio rotante in seno a un gas, per il funzionamento del rocchetto di Ruhmkorff, ha dimostrato che la periodica interruzione di correnti anche intense, fino a un centinaio di volte per minuto secondo, si compie in essi senza alcun inconveniente; ciò avviene nonostante ad ogni rottura si produca una energica sfiammata per la estracorrente del circuito primario. Se poi la corrente interrotta proviene da un circuito non induttivo, e perciò non dà la fiamma della estracorrente, l'apparecchio funziona quasi senza perdita locale di energia, oltre che senza alcun deterioramento delle parti metalliche. In tutti i casi se il mercurio del getto si volatilizza, esso condensandosi ricade senza alterazione lungo le pareti della marmitta, per le qualità inerti del gas.

In un apparecchio da me costruito al principio dello scorso anno, si trasse profitto di questa proprietà del getto rotante di mercurio per stabilire una comunicazione periodica fra le tre fasi di un sistema trifase e un conduttore che, raccogliendo così la parte più elevata e positiva dell'onda di potenziale, rende disponibile fra quel conduttore e il neutro della rete una corrente raddrizzata periodicamente interrotta. Per raggiungere lo scopo mi servivo di una marmitta in ghisa a chiusura ermetica, nella quale si manteneva un'atmosfera di gas illuminante; in essa erano disposte sei lamine metalliche, isolate, e distribuite regolarmente come parti di una unica superficie cilindrica. Fra due lamine contrapposte il getto rotante di mercurio, aspirato per la rotazione di un albero dal fondo della marmitta e lanciato da due beccucci prossimi alle lamine, stabilisce un contatto periodico.

Il motorino sincrono che trascina il getto compie un giro ogni due periodi; e perciò la fase di contatto fra le lamine contrapposte si sussegue, da una coppia di lamine alla successiva, dopo 1/3 del periodo della corrente; cosicchè, connettendo tre lamine successive alle tre fasi in un senso opportuno, le tre lamine contrapposte rilegate fra loro riceveranno dal getto, per trasmetterla al neutro, una corrente raddrizzata periodicamente interrotta.

Un particolare schema di circuiti permette di trasformare questa corrente unilaterale, ma periodicamente interrotta, in una corrente praticamente costante; ricorrendo all'accumulazione magnetica di energia in una forte autoinduzione, e utilizzandola in parte per alimentare il ricevitore durante le pause in virtù di una cella ad alluminio opportunamente disposta.

L'apparecchio fu già descritto in dettaglio nel Monitore Tecnico del 10 novembre; la corrente con esso ottenuta può considerarsi praticamente

costante, risultando dalla sovrapposizione di una corrente continua e di una piccola ondulazione, alla quale corrisponde una intensità efficace eguale a circa il 2 o il 3 per cento della corrente continua; si può quindi con essa anche alimentare un arco voltaico, senza che si riesca a manifestare all'esame stroboscopico la minima pulsazione luminosa. Il rendimento globale di quel primo apparecchio era dell'ordine del 75 per 100.

2. La cella ad alluminio, che aveva la funzione di permettere alla self l'alimentazione del ricevitore durante le pause periodiche, le quali venivano così colmate, funziona in condizioni del tutto diverse da quelle degli ordinarî raddrizzatori elettrolitici; poichè la pausa durante la quale la cella stessa lavora non supera un quinto del tempo in cui essa è inattiva. Il suo funzionamento si mostrò perciò scevro di tutti gli inconvenienti noti dei

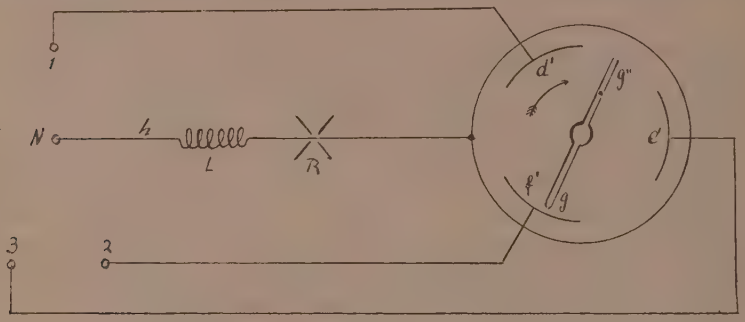

Fig. 1.

raddrizzatori, e le sue dimensioni potevano esser piccole, pur prelevando dall'apparecchio una potenza notevole. Ma essa costituiva ancora il punto debole dell'apparecchio: sia per la potenza assorbita, a danno del rendimento, sia per la difficoltà di conservarla in buone condizioni in un esercizio prolungato di tipo industriale.

Il nuovo apparecchio che ho potuto costruire recentemente, e che descriverò in questa Nota, presenta il grande vantaggio di fare a meno della cella, richiedendo solo la marmitta col getto rotante e la self; esso, mentre può fornire una corrente praticamente costante, poichè la componente alternativa di ondulazione non supera l'uno per cento della corrente totale, non ha più interruzioni periodiche producentisi fra il mercurio e le lamine, permettendo così di elevare di molto la corrente erogata senza perdere troppa energia nella marmitta e senza deteriorare le lamine. Ne risulta un convertitore veramente industriale di facilissima manutenzione, e capace di fornire la voluta corrente continua con un rendimento globale superiore al 95 %.

La marmitta contiene tre lamine d', e', f', invece di sei (fig. 1); ed esse sono rilegate alle tre fasi, mentre il duplice getto g', g'' pone periodi-

camente in comunicazione le lamine col mercurio, e quindi con la massa della marmitta, dalla quale parte il conduttore *h* che porta la corrente alla self, al ricevitore *R* e al neutro *N*. Come si vede dalla figura, funzionano ora l'uno, ora l'altro estremo del getto diametrale rotante, col lambire alternativamente e successivamente le tre lamine. Dando perciò alle tre lamine un'ampiezza angolare molto vicina a 60°, si può ridurre a piacere la durata della pausa fra l'abbandono di una lamina e il contatto con la successiva, o anche ottenere che il nuovo contatto si formi prima che cessi il precedente, e ciò pur restando di circa 60° l'intervallo fra gli orli affacciati delle lamine successive, cosicchè è completamente esclusa la possibilità di corti circuiti permanenti fra le lamine stesse.

Scegliendo opportunamente la posizione dello statore del motorino, da cui dipende la posizione del getto rotante, si può fare in modo che ciascuna fase sia utilizzata simmetricamente rispetto alla cresta della sinusoide, e se le lamine hanno una larghezza tale che i due getti tocchino contemporaneamente, per brevissimo tempo, le due lamine, ciò avverrà proprio nel momento in cui le due lamine rilegate alle fasi hanno lo stesso potenziale. In queste condizioni è disponibile fra il mercurio del getto e il neutro una tensione pulsante mai interrotta, rappresentata dalle tre creste sinusoidali delle tre tensioni delle fasi. Vengono così due lamine qualunque a trovarsi periodicamente in corto circuito attraverso al getto, ma ciò si verifica solo negli istanti in cui tra le lamine non esiste tensione o ne esiste una trascurabile, mentre il corto circuito cessa appena fra le lamine, nello svolgersi delle tensioni alternative, si ridesta la differenza di tensione. La larghezza più opportuna delle lamine va determinata sperimentalmente, perchè l'esperienza ha dimostrato che la durata del contatto fisico è leggermente superiore a quella che si desumerebbe dall'ampiezza angolare della lamina, e che su questa differenza agisce la natura del gas che riempie la marmitta. La regolazione può essere fatta una volta per tutte in fabbrica, ovvero può essere fatta a volontà sull'apparecchio, dando alle lamine una forma trapezoidale e approfondendole più o meno, con che muta di ampiezza la parte della lamina lambita dal getto.

Nel primo apparecchio, fornito del dispositivo egualizzatore self-cella elettrolitica per ricolmare le pause, a misura che si riduce la pausa, la cella funziona da condensatore elettrostatico e può essere sostituita da un vero condensatore. Quando poi la pausa si è ridotta a zero, e si ha addirittura un brevissimo periodo di sovrapposizione nei contatti di due lamine col getto come nel nuovo dispositivo, la funzione delle celle o del condensatore diviene superflua ed esse possono sopprimersi; a render costante la corrente nell'utilizzatore basta in tal caso l'autoinduzione, poichè il contatto fra il getto e le lamine non viene mai a mancare. Non si formano più dentro alla marmitta archi di rottura, tranne quelli debolissimi dovuti alla

autoinduzione del filo di linea che va alla lamina, in quanto la corrente cessa in una lamina per crearsi nell'altra che sta in contatto con essa attraverso il getto. Una piccola rotazione dello statore, col conseguente spostamento angolare del getto può far sì che la corrente proveniente dalla lamina si annulli da sè prima del distacco, perchè trovasi in quell'istante a potenziale leggermente superiore l'altra lamina. Ma di questo spostamento, analogo alla rotazione delle spazzole delle dinamo per la commutazione senza scintilla, non c'è in realtà alcun bisogno, poichè l'apparecchio, capace di resistere alle ampie sfiammate di rottura delle correnti che alimentano il primario del rocchetto di Ruhmkorff, non subisce alcun danno dalla commutazione fra le due lamine in corto circuito; cosicchè si può far lavorare il getto nell'aria anzichè nel gas, per quanto questo sia preferibile. Il consumo totale di energia nella marmitta, in una esperienza eseguita prelevando 35 ampère sotto 150 volt, non supera 50 watt, e resta inferiore a 140 watt, prelevando 70 ampère.

È da notare che nell'apparecchio usato il breve contatto periodico fra due lamine, provocato dal getto, dura circa un trentesimo di periodo; si ha perciò un piccolo consumo a vuoto, di una diecina di watt, che si eleva a 50 watt, quando vengono erogati oltre 5 kilowatt. Computando a 90 watt il consumo del motorino, e ad altrettanti il consumo nella self, si ottiene così un rendimento globale, esclusi i fili per le connessioni, corrispondente a 5250 watt utili su 5380 consumati; e cioè del 97 per cento. Si potevano senza inconvenienti prelevare dall'apparecchio oltre 70 ampère, mentre tutto l'insieme, della potenza utile non inferiore a 10 kilowatt, pesa meno di 60 kilogrammi, compresa la self. Un gruppo convertitore motore-dinamo di eguale potenza peserebbe oltre 1000 kilogrammi, senza il basamento in ferro.

Per brevità non riferirò qui sugli accorgimenti adottati per evitare che, essendo le lamine rilegate alle fasi ed esposte allo strisciamento del getto, questo, rimbalzando, possa determinare dei colpi secchi e brevi di corto circuito tra le fasi e tra queste e la marmitta; invece nessun inconveniente deriva dalle note oscillazioni del rotore del motore sincrono intorno alla posizione di sincronismo, quando queste vengano attenuate coi noti artifizi, bastando perciò la gabbia di scoiattolo in rame che serve per l'avviamento dei motorini a croce di ferro già esistenti in commercio.

3. L'apparecchio descritto permette di ottenere da un sistema di correnti trifasi una tensione unilaterale ondulata, di cui le creste si susseguono a un terzo di periodo e sono di ampiezza doppia dei minimi. Da questa tensione pulsante si ricava una corrente praticamente costante in virtù della self inserita nel circuito di utilizzazione.

Un successivo perfezionamento all'apparecchio contiene una disposizione la quale, ricorrendo sempre al sistema dei contatti di un getto rotante di

mercurio con lamine metalliche in seno a un gas, e ad un particolare trasformatore, consente di avere una tensione ondulata con creste succedentisi a un sesto di periodo, e con minimi differenti dalla cresta di solo il 13 per cento. Riducendo così a poco più di un quarto l'ampiezza della pulsazione della forza elettromotrice, e raddoppiandone la frequenza, basterà ricorrere a una self circa otto volte minore per attenuare in egual misura che nel primo dispositivo la pulsazione della corrente continua ottenuta.

La disposizione è rappresentata nella fig. 2. In essa T rappresenta un trasformatore trifase, nel quale i punti di mezzo dei tre avvolgimenti a bassa tensione sono uniti insieme, costituendo così in N il neutro del sistema. Rispetto a questo neutro il trasformatore presenta sei estremi α, β, γ da una parte, $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ dall'altra, e questi ultimi hanno in ogni istante potenziali eguali e contrarî a quelli dell'estremo di sinistra dello

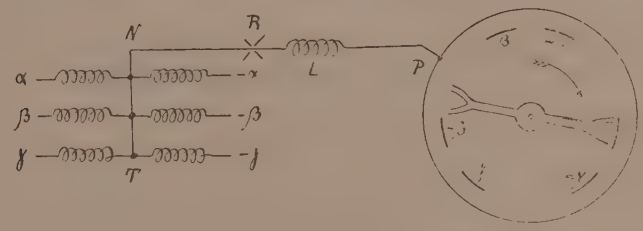

Fig. 2.

stesso avvolgimento. Il neutro N è collegato al ricevitore R, alla self L e alla massa della marmitta P, come nella figura. Per le proprietà note del sistema trifase, se con un punto mobile si esplora il potenziale degli estremi degli avvolgimenti nell'ordine α, $-\gamma$, β, $-\alpha$, γ, $-\beta$, con intervalli di un sesto di periodo fra un contatto e il successivo, scegliendo la fase del contatto nelle vicinanze del culmine della tensione, il punto verrà a possedere rispetto al neutro i potenziali rappresentati dalla curva della fig. 3, costituita dai sei archetti culminali di una sinusoide. Perciò tra il punto mobile e il neutro esisterà una tensione unidirezionale pulsante; l'ampiezza della pulsazione sarà solo 0,134 dell'ampiezza della sinusoide, e la frequenza sarà sei volte quella della tensione trifase.

Basterà pertanto rilegare il ricevitore di corrente continua, attraverso una self, tra il neutro e quel punto mobile che raccoglie la tensione dei sei capi del trasformatore nel modo sopra indicato, per ottenere una corrente continua e praticamente costante.

Provvede a questa funzione la marmitta a sei lamine della fig. 2, che contiene un sistema di getti rotanti di mercurio, trascinato dal solito motore sincrono, il quale compie un giro ogni due periodi. Le lamine sono connesse ai capi degli avvolgimenti secondo la indicazione delle lettere ac-

canto segnate (per semplicità non sono disegnati i fili di connessione). Il sistema rotante, da cui proviene il mercurio aspirato dal fondo della marmitta, alimenta quattro getti di pochi millimetri di lunghezza (poichè i beccucci sono vicini alle lamine); e questi beccucci sono disposti in modo che quando, dei due getti vicini, uno sta per abbandonare la lamina, per es. α, l'altro cominci a toccare la lamina vicina $-\gamma$; restando così per un istante in contatto le fasi α, $-\gamma$, ciò che avviene però nel momento in cui le rispettive tensioni sono uguali. Ogni lamina è lambita prima da uno dei getti, poscia dal successivo, prima che l'altro l'abbandoni; ma la distanza angolare dei getti, e l'ampiezza angolare delle lamine sono regolate in modo che il contatto fra il mercurio, e quindi la massa della marmitta, e ognuna delle lamine abbia una durata vicinissima a un sesto di periodo, dopo di che, e prima che il contatto cessi, si inizia il contatto con la lamina successiva.

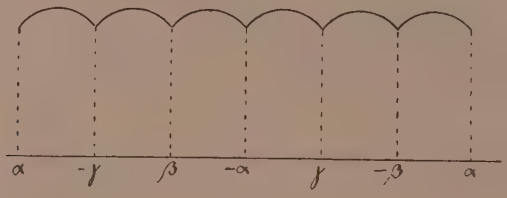

Fig. 3.

L'artificio dei due getti che si seguono nel lambire la stessa lamina serve a far durare il contatto tra il mercurio e la lamina per il tempo dovuto, senza che sia per ciò necessario dare alle lamine un'ampiezza troppo grande, poichè, ciò facendo, le lamine contigue, per es. α e $-\gamma$, quasi si toccherebbero, e potrebbe tra loro costituirsi un corto circuito permanente; invece il duplice getto (disegnato schematicamente con una forchetta nella figura), crea il corto circuito nel solo istante in cui i potenziali sono eguali, e dopo le lamine restano fra loro isolate.

4. In tutti i dispositivi descritti, poichè il getto mette per poco tempo in contatto le lamine rilegate alle fasi, è indispensabile che questo contatto si compia solo quando fra le lamine insieme toccate esiste una tensione nulla o trascurabile. Occorre pertanto evitare che le lamine siano in tensione quando il motorino, nella fase di avviamento o di fermata, sia fuori di sincronismo, ovvero quando, non essendo ben regolata la posizione dello statore, il contatto fra mercurio e lamina non avviene nella prossimità della cresta della sinusoide. A quest'ultima regolazione si provvede una volta tanto nella messa a posto dell'apparecchio; giova in tal caso inserire al posto delle valvole che stanno a monte delle lamine tre lampadine e girare

lo statore fino a che le lampadine quasi si spengano, denotando con ciò che è divenuta minima la corrente (a vuoto) fra le lamine poste periodicamente in contatto.

Ma ad evitare che le lamine siano poste in contatto fuori tempo nella fase di avviamento o di fermata del motorino, è opportuno che in queste manovre le lamine siano senza tensione. Occorre cioè, all'avviamento, in un primo tempo lanciare il motorino e, dopo, a sincronismo raggiunto, dare tensione alle lamine; alla fermata togliere tensione alle lamine prima di arrestare il motorino. Basta a tal uopo che le manovre di lanciare il motorino e dar tensione alle lamine siano fasi successive di un unico movimento progressivo dell'apparecchio di comando; ciò che può realizzarsi in diversi modi che non occorre descrivere perchè di uso corrente.

Chimica. — *Sul peso molecolare di alcuni sali sciolti nell'uretano.* Nota del Corrispondente G. Bruni.

In uno degli ultimi fascicoli del Journal de Chimie physique (1) il signor M. Stuckgold ha pubblicato un lavoro sulle proprietà dell'uretano etilico come solvente per alcuni sali. In esso egli conclude che l'uretano è un solvente dotato di forte potere dissociante, e ciò sia in base a misure di conduttività, sia in base a misure crioscopiche.

Se il signor Stuckgold avesse esaminato la letteratura dell'argomento, si sarebbe accorto che egli era stato preceduto, almeno per ciò che riguarda l'impiego dell'uretano come solvente crioscopico di sali metallici. Così N. Castoro (2) lo aveva già impiegato per determinare il peso molecolare di alcuni sali metallici. Più tardi io e A. Manuelli (3) vi sciogliemmo cloruro manganoso, cloruro cobaltoso e cloruro rameico, trovando per gli ultimi due pesi molecolari affatto normali e pel cloruro manganoso valori del 10 per cento inferiori al teorico.

Questo fatto ha richiamato la mia attenzione sui risultati delle esperienze crioscopiche del signor Stuckgold la cui esattezza mi parve subito assai dubbia. Questo autore comincia col verificare la costante crioscopica determinata da Eykman (K = 51,4); a questo scopo egli compie tre determinazioni ciascuna ad una sola concentrazione con naftalina, urea e nitrotoluolo (non è detto quale dei tre isomeri), trovando rispettivamente K = 53,5; 52,7; 53,4. Come media fra questi valori e quello di Eykman prende K = 52,8. Anzitutto nei dati relativi all'urea è incorso evidentemente un grossolano errore di scrittura o di stampa. Infatti, se l'abbassamento del punto di con-

(1) Tome 15, n. 4, 31 déc. 1917, 502-516.
(2) Gazz. chim. ital. *28*, II, 317 (1898).
(3) Zeitschr. f. Elektrochem., 1904, n. 33, 601.

gelamento è 0,053, la concentrazione deve essere 0,06 per cento anzichè 6,0 come è indicato. Indipendentemente da questo debbono essere incorsi nel calcolo piccoli errori numerici perchè io dai dati stessi di S. deduco per $K = \frac{M\Delta}{c}$ risp. 54,3; 53,0; 54,1.

Dopo ciò Stuckgold procede a determinare il peso molecolare dei ioduri di ammonio, potassio e rubidio, e dà i risultati che qui appresso si riportano:

	Concentrazione	Δ	P. mol. trovato	Grado di dissociaz. α
$NH_4I = 145$	0,76	0,347	115,4	0,25
»	0,30	0,147	110,0	0,31
$KI = 166$	0,055	0,031	94	0,76
»	0,075	0,041	97	0,71
$RbI = 205$	0,04	0,012	177	0,15

Colpisce qui anzitutto il comportamento così diverso che avrebbero tre sali così simili fra loro come i tre ioduri studiati, fatto che appare assai inverosimile. Ma le ultime tre misure (quelle su KI e RbI) si riferiscono a concentrazioni e ad abbassamenti così minimi che non è possibile trarne conclusioni quantitative nemmeno approssimate. Stuckgold stesso lo riconosce esplicitamente (pag. 513), ma non si comprende perchè non abbia operato a concentrazioni più forti, mentre dalle sue stesse determinazioni di solubilità risulta che di quei sali possono aversi soluzioni enormenente più concentrate.

Mi è parso quindi necessario ripetere le determinazioni crioscopiche sul ioduro potassico a concentrazioni più elevate. Le esperienze furono eseguite nell'Istituto di Chimica generale di Padova dal dottor Mario Amadori che ringrazio vivamente.

L'uretano impiegato era un preparato Erba « purissimo per analisi » e fu ulteriormente purificato distillandolo a bassa pressione e poi cristallizzandolo quattro volte dal benzolo anidro per crioscopia. Fondeva costantemente a 49°. Il ioduro potassico era un prodotto Merck « purissimo per analisi » e fu riscontrato tale. Prima di impiegarlo fu seccato in stufa a 160°. Le determinazioni furono eseguite in corrente di aria secca. Come costante crioscopica ho tenuto il valore di Eykman $K = 51,4$.

Concentrazioni	Abbassamenti osservati	Pesi molecolori trovati
0,428	0,15	146,6
1,524	0,52	150,6
0,725	0,25	149,0
2,358	0,80	151,5
0,933	0,32	149,8
2,850	0,97	151,0
2,000	0,68	151,2
3,966	1,34	152,1
		Media 150,2

Peso molecolare teorico KI = 166,0

Grado di dissociazione α = 0,10

Come si vede il ioduro potassico è certamente dissociato in uretano; il grado di dissociazione però è assai inferiore non solo ai valori affatto inverosimili trovati da Stuckgold per questo sale, ma anche a quelli dati pel ioduro ammonico. Esso è piuttosto quasi identico a quello che si avrebbe secondo le misure mie e di Manuelli pel cloruro manganoso ($\alpha = 0{,}11$).

Si potrebbe cercare di confrontare il valore trovato da noi con quello che si potrebbe dedurre dai valori della conduttività determinati da Stuckgold, ma non credo che questo confronto possa avere molta importanza, data la grande incertezza che lo stesso Stuckgold ammette aversi nel calcolo del valore di A_∞ per la troppo grande conduttività propria del solvente.

Il sig. Stuckgold comunica poi i risultati di una determinazione crioscopica su soluzioni di salicilato di litio in uretano da cui risulta un peso molecolare doppio, e riferisce che, secondo osservazioni inedite del professore Dutoit. questo sarebbe un comportamento generale dei sali di litio in solventi organici.

Il fatto è senza dubbio assai interessante, ma anche qui l'Autore dimostra di non aver studiato la letteratura delle soluzioni non acquose. Se lo avesse fatto avrebbe trovato che questo comportamento fu scoperto nientemeno che ventidue anni fa da Zanninovich-Tessarin [1] nel Laboratorio del prof. Nasini. Questo autore trovò infatti pesi molecolari quasi doppî pel cloruro di litio in acido acetico, ma d'accordo con osservazioni inedite di A. Hantzsch verificò che su questo comportamento hanno grande influenza piccole quantità di umidità presenti nel solvente.

Chimica fisiologica. — *Sulla composizione chimica di alcuni generi alimentari.* Nota del Corrisp. S. Baglioni e di Settimj.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

[1] Gazz. chim. it. *26*, I, 316-317 (1896).

Fisica. — *Nuovo contributo allo studio del doppio strato elettrico al contatto del mercurio con l'aria ionizzata dai raggi di Röntgen* [1]. Nota del prof. V. Polara, presentata dal Socio A. Riccò.

È stato recentemente dimostrato [2] che anche al contatto del mercurio con l'aria ionizzata dai raggi di Röntgen si determina un doppio strato elettrico che si può mettere in evidenza, mediante il solito dispositivo del Pellat [3] — in cui si sopprima l'acqua acidulata ed il sifone — per mezzo della diminuzione di potenziale che subisce il mercurio quando si faccia aumentare la sua estensione (fenomeno di Lippmann).

Lo strumento che serviva a svelare in tale ricerca la differenza di potenziale fra il mercurio invariabile e quello estensibile era l'elettrometro capillare, e l'apparecchio di Pellat, irradiato dall'alto da un tubo focus, era disposto in una cassa foderata di piombo, il cui coperchio era costituito da una grande lamina metallica in comunicazione col suolo [4]; veniva così soppressa ogni elettrizzazione per effetto del tubo e dei fili che lo alimentavano.

Poichè però l'innalzamento del menisco dell'elettrometro, durante l'accrescimento della superficie del mercurio estensibile — il mercurio della punta dell'elettrometro essendo messo in contatto con il mercurio estensibile e quello della provetta con il mercurio invariabile — è stato alquanto minore di quello che si è osservato nel caso degli elettroliti, si è pensato che, oltre che la diversa natura del contatto, anche la presenza del conduttore in comunicazione col suolo potesse essere causa della diminuzione di spostamento del menisco.

Ho creduto quindi opportuno di ricercare sotto quale aspetto si presenta il fenomeno quando si sopprima la grande lamina in comunicazione col suolo che fa da coperchio alla cassa.

Poichè in tal caso il tubo focus ed i fili che lo alimentano destano un campo elettrico all'interno della cassa, l'elettrometro segnala, quando sia azionato il tubo, una differenza di potenziale fra i due elettrodi e, per talune posizioni del tubo, l'elettrodo estensibile assume un potenziale più elevato di quello invariabile, il menisco abbassandosi fino all'estremo del ca-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Catania, diretto dal prof. G. P. Grimaldi.

(2) Polara e Maresca, Rend. Acc. Lincei, vol. XXVII, pag. 243, 1918.

(3) Pellat, *Cours d'électricité*, tome III, pag.

(4) Polara e Maresca, loc. cit.

pillare in 30″ circa. Se si prova ad azionare il tubo quando è stato disposto il bicchiere carico di mercurio nel recipiente A_1 dell'apparecchio, cioè quando la superficie del mercurio estensibile ha assunto il massimo valore, si vede ancora il menisco abbassarsi, ma molto più notevolmente e rapidamente di prima, raggiungendo esso l'estremo del capillare in meno di 10″, e determinando l'efflusso del mercurio dalla punta: nelle condizioni indicate quindi, assumendo il mercurio estensibile posizioni diverse nel campo creato dal tubo, si accresce la differenza di potenziale fra il mercurio estensibile e quello invariabile.

Tutto ciò, che potrà eventualmente perturbare la genuina osservazione del fenomeno nel periodo della variazione di superficie del mercurio estensibile, è però perfettamente analogo, negli effetti, a ciò che si nota quando, volendo verificare la legge di Lippmann per l'alcool e la glicerina, si fa uso del galvanometro (1) invece che dell'elettrometro: anche in tal caso infatti la corrente che serve a polarizzare come catodo il mercurio estensibile, determina una deviazione permanente nell'equipaggio del galvanometro dalla parte opposta a quella verso cui esso devia nel periodo della estensione del mercurio — verso i numerosi neri della scala cioè se tale estensione produce una deviazione verso i rossi — e tale deviazione permanente si rivela alquanto più notevole se il mercurio estensibile assume la massima superficie, a causa della diminuita resistenza del circuito.

Durante la estensione del mercurio però, come nel caso ora indicato si osserva una chiara deviazione temporanea dell'equipaggio del galvanometro verso i numeri rossi della scala (a cui segue, mentre la superficie del mercurio resta permanentemente accresciuta, una più notevole deviazione permanente verso i numeri neri della scala), così nel caso dell'aria ionizzata ho potuto chiaramente osservare che il menisco dell'elettrometro subisce un temporaneo e notevole innalzamento (a cui segue un abbassamento rapido e tanto notevole da far sgorgare il mercurio dalla punta).

E poichè nel caso del contatto mercurio-alcool e mercurio-glicerina la deviazione temporanea dell'equipaggio del galvanometro verso i numeri rossi della scala è indice (2) d'una variazione di densità nel doppio strato elettrico, così l'innalzamento temporaneo del menisco dell'elettrometro è da ritenere segno d'una analoga variazione nella densità del doppio strato al contatto del mercurio con l'aria ionizzata dai raggi di Röntgen: nell'un caso e nell'altro il fenomeno è solo *perturbato*, ma pur sempre rivelabile nel suo insieme.

Ed è notevole che l'innalzamento del menisco durante l'accrescimento della superficie del mercurio si manifesta in tal caso dell'ordine di grandezza di quello osservato nel caso dell'alcool e della glicerina.

(1) Polara e Maresca, Rend. Acc. Lincei, vol. XXVI, 1917, pag. 125.
(2) Polara, Rend. Acc. Lincei, vol. XXVII, pag. 294, 1918.

Spostando convenientemente il tubo focus, si può ottenere che mentre esso è in azione, il mercurio estensibile assuma un potenziale meno elevato del mercurio invariabile (del che ci avverte l'elettrometro con un innalzamento del menisco), quando il mercurio estensibile ha la minima superficie, e l'inverso accada quando tale mercurio ha la massima superficie (del che ci avverte ancora l'elettrometro con l'abbassamento del menisco).

In tali condizioni nel periodo della estensione del mercurio si osserva un chiaro abbassamento del menisco, e appena il mercurio ha raggiunto la massima estensione si nota dapprima un piccolo impulso in alto nel menisco stesso, come se esso tendesse a riprendere la sua primitiva posizione, e poi un rapido e permanente abbassamento.

Per quanto sia meno facile discernere in questo caso i due impulsi del menisco, perchè concordanti, pare tuttavia, da quanto è stato notato, che all'atto dello accrescimento di superficie del mercurio estensibile il menisco si abbassi invece di innalzarsi.

Se si considera che il campo elettrico destato nella cassa polarizza in tal caso il mercurio estensibile e determina una f. e. m. di più di 1 Volta, l'inversione osservata potrà verosimilmente attribuirsi appunto a tale polarizzazione, supposto che la f. e. m. con cui si polarizza sia superiore a quella ccorrente per annullare la densità del doppio strato elettrico, e che al contatto del mercurio con l'aria ionizzata valga ancora la legge di Lippmann, già dimostrata per gli elettroliti e per l'alcool e la glicerina.

Fisica terrestre. — *Contributo alla teoria del pendolo orizzontale.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio E. Millosevich.

1. In sismometria la disposizione, che si suole dare ad un *pendolo orizzontale*, è mostrata dall'annessa figura, dove A e B sono i due punti di sostegno, e perciò AB è l'asse di rotazione del pendolo; C rappresenta il centro di gravità della massa pendolare; AC il legame rigido o flessibile, ma inestensibile, che collega la massa con A; e BC un braccio rigido che tiene la massa fuori dell'asse di rotazione. Noi ci occuperemo dello sforzo esercitato sopra i due punti A e B, sforzo che bisogna saper valutare, prima di costruire un pendolo orizzontale, allo scopo di attenuare gli attriti che ne derivano allo strumento, e di conoscere la resistenza necessaria al materiale occorrente per la sua costruzione.

Nel nostro studio supponiamo verticale l'asse AB (come lo è realmente in alcuni sismografi, e poco inclinato negli altri), senza peso i lati AC e BC, la massa di peso P concentrata in C, e dapprima niuna restrizione sulla

specie del triangolo ABC. Decomponiamo il peso $P = CD$ nelle due componenti $Q = CF$ e $R = CE$, delle quali la 1ª rappresenta la sollecitazione del punto A nella direzione AC, come pure lo stiramento suscitato in qualsiasi tratto di AC, mentre la 2ª rappresenta la pressione su B in direzione CB ed altresì la compressione in qualsiasi parte del lato BC.

Poichè i triangoli ABC e CDE sono simili, sarà $R = P\frac{BC}{AB}$ e $Q = P\frac{AC}{AB}$, e si vede, in linea generale, che per rendere piccoli R e Q, si ha vantaggio nell'allontanare tra loro i due punti A e B e nel fare possibilmente corti i lati BC e AC. Sarà poi $R < Q$ per $BC < AC$ e viceversa, e $R = Q$ per $AC = BC$, quando cioè sarà isoscele il triangolo ABC.

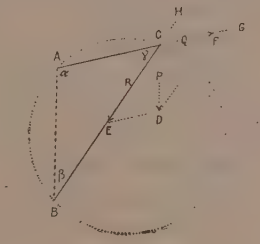

Fig. 1.

Per farsi subito un'idea della variabilità di R e Q al variare dei lati AC e BC i quali ruotano rispettivamente attorno ad A e B, restando sempre nel piano verticale ABC, supponiamo costante, oltre a P, anche AB. In tal caso, $R : Q = BC : AC$ e basterà considerare, volta per volta, le stesse lunghezze di AC e BC. Così, per $AC = 0$, sarà $Q = 0$ e $R = P$ ed il pendolo da *orizzontale* si trasformerà in *rovescio*, cioè con la massa pendolare in A, che con tutto il suo peso preme su B. Viceversa, per $BC = 0$, sarà $R = 0$ e $Q = P$ ed il pendolo da *orizzontale* diverrà *verticale*, cioè con la massa pendolare in B, sostenuta dal solo punto A. Man mano che C si allontana da AB, crescono Q e R fino all'∞ per $AC = BC = \infty$. Se C va a cadere su AB, Q e R sono proporzionali ai segmenti AC e BC, e se C cade nel punto di mezzo di AB, sarà $Q = R = \frac{P}{2}$.

2. Può tornar comodo, valutare le forze R e Q anche in funzione degli angoli del triangolo ABC, simile all'altro CDE. In quest'ultimo si ha $R = P\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}$ e $Q = P\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}$, e questi valori diventano sempre più piccoli, col fare crescere il denominatore fino al suo valore massimo per $\gamma = 90°$, e decrescere i numeratori fino a zero, al limite di $\alpha = \beta = 0$. Senza volermi trat-

tenere sulla discussione generale delle due formule predette, mi limito ad alcuni casi particolari, specialmente quelli che ricorrono più spesso in pratica.

Caso I. Nell'ipotesi di γ costante, C è obbligato a restare sopra una circonferenza, di cui AB è una corda. Nella 1ª formula, R raggiunge il massimo $\left(\frac{P}{\text{sen}\,\gamma}\right)$ per $\alpha = 90°$, se $\gamma < 90°$, nel qual caso BC diviene appunto il diametro, e poi R va decrescendo con α fino ad annullarsi per $\alpha = 0$, ossia $\beta = 180° - \gamma$, ed allora il pendolo diviene *verticale*. Se α cresce a partire da 90°, R va decrescendo fino a P al limite di $\alpha = 180° - \gamma$ e $\beta = 0$, nel qual caso il pendolo si trasforma in *rovescio*. Nella 2ª formula, Q diviene massimo $\left(\frac{P}{\text{sen}\,\gamma}\right)$ per $\beta = 90°$, se $\gamma < 90°$, nel qual caso AC diviene uguale al diametro, e poi Q decresce con β fino ad annullarsi per $\beta = 0$ e $\alpha = 180° - \gamma$ (pendolo *rovescio*). Al crescere di β al di là di 90°, Q decresce di nuovo fino a P per $\beta = 180° - \gamma$ e $\alpha = 0$ (pendolo *verticale*).

Il valore massimo $\left(\frac{P}{\text{sen}\,\gamma}\right)$ di R e Q diverrà tanto più grande quanto minore sarà γ, e diverrà ∞ per $\gamma = 0$, nel caso limite di $AC = BC = \infty$.

Caso II. Se, invece, si considera costante α, cioè C scorrevole sulla AG, allora nella 1ª formula, per $\gamma = 90°$, se $\alpha < 90°$, R acquista il valore minimo ($P \text{ sen}\,\alpha = P \cos\beta$), cioè quando $BC \perp AC$. Ma, col decrescere di γ, R cresce fino all'∞ al limite di $\gamma = 0$ e di $\beta = 180° - \alpha$, quando BC è parallela ad AC, ossia quando C va all'∞. Per γ sempre più grande di 90°, R va pure crescendo, e al limite di $\gamma = 180° - \alpha$ e $\beta = 0$, uguaglia P, il che avviene quando C cade in A (pendolo *rovescio*). In quanto a Q, nella 2ª formula esso assume il valore $P \cos\alpha = P \text{ sen}\,\beta$ per $\gamma = 90°$ e $\beta = 90° - \alpha$, e poi va crescendo, col decrescere di γ, fino all'∞ per $\gamma = 0$ e $\beta = 180° - \alpha$. Per γ crescente al di là di 90°, Q decresce fino a zero al limite di $\gamma = 180° - \alpha$ e $\beta = 0$ (pendolo *rovescio*).

Caso III. Se, infine, si fa costante β, nel qual caso C si mantiene su BH, allora nella 2ª formula per $\gamma = 90°$, se $\beta < 90°$, Q acquista il minimo valore ($P \text{ sen}\,\beta = P \cos\alpha$), ciò che si verifica per $AC \perp BC$; ma poi Q cresce col decrescere di γ, tanto da diventare ∞ al limite di $\gamma = 0$ e $\alpha = 180° - \beta$, corrispondente al caso di AC parallela a BH, cioè di C andato a distanza infinita. Ove poi γ cresca a partire da 90°, crescerà Q fino ad uguagliare P al limite di $\gamma = 180° - \beta$ e $\alpha = 0$ (pendolo *verticale*). In quanto a R, la 1ª formula fa vedere che esso raggiunge il valore $P \cos\beta = P \text{ sen}\,\alpha$ per $\gamma = 90°$, e poi col decrescere di γ, va sempre più crescendo fino all'∞, al limite di $\gamma = 0$ e $\alpha = 180° - \beta$, il che significa che C si è allontanato infinitamente. Ove poi γ crescesse al di là di 90°, R diminuirebbe sempre più fino a zero per $\gamma = 180° - \beta$ e $\alpha = 0$ (pendolo *verticale*).

Caso IV. Supposto $\alpha = \beta$, sarà pure $R = Q$, ed il luogo del punto C sarà la $\perp$ ad AB innalzata dal suo punto di mezzo, come già abbiam visto da principio.

Caso V. Facendo $\alpha = 90°$, si avrà: $R = \frac{P}{\text{sen } \gamma} = \frac{P}{\cos \beta}$ e $Q = P \text{ tg } \beta = P \frac{AC}{AB}$.

R decresce con β fino al valore minimo P per $\beta = 0$, quando cioè si ha da fare con un pendolo *rovescio*, poi cresce con β fino all'∞ per $\beta = 90°$, ossia per $AC = BC = \infty$. Q decresce con β fino ad annullarsi per $\beta = 0$ (pendolo *rovescio*), poi crescerà con β fino all'∞ per $\beta = 90°$, ossia $AC = BC = \infty$.

Caso VI. Per $\beta = 90°$, si avrà: $R = P \text{ tg } \alpha = P \frac{BC}{AB}$ e $Q = \frac{P}{\text{sen } \gamma} = \frac{P}{\cos \alpha}$ (1).

R decresce con α e si annulla per $\alpha = 0$ (pendolo *verticale*), poi cresce con α ed uguaglia P per $\alpha = 45°$, ossia $AB = BC$, indi cresce ancora fino all'∞, al limite di $\alpha = 90°$, ossia di $AC = BC = \infty$. Q acquista il minimo valore P per $\alpha = 0$ (pendolo *verticale*) e poi cresce con α fino all'∞, per $\alpha = 90°$, ossia $AC = BC = \infty$.

Caso VII. Resta a fare $\gamma = 90°$, nel qual caso C resta sopra la circonferenza, di cui AB è diametro, ed allora: $R = P \text{ sen } \alpha = P \cos \beta$ e $Q = P \cos \alpha = P \text{ sen } \beta$. Sarà $R = 0$ per $\alpha = 0$ e $\beta = 90°$ (pendolo *verticale*), e crescerà con α fino al valore massimo P per $\alpha = 90°$ e $\beta = 0$ (pendolo *rovescio*). Q acquisterà il valore massimo P per $\alpha = 0$ e $\beta = 90°$ (pendolo *verticale*), poi decrescerà al crescere di α, fino ad annullarsi per $\alpha = 90°$ e $\beta = 0$ (pendolo *rovescio*).

(1) Alle stesse formule, ed altre consimili, si arriva pure facilmente con la teoria dei *momenti*. Infatti, considerando il sistema ABC quale una leva non rettilinea col fulcro in A, sulla medesima agiscono due sole forze, e cioè P e la reazione del punto di sostegno

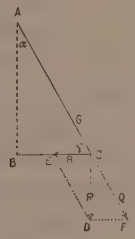

Fig. 2.

B uguale in grandezza alla pressione R esercitata dal braccio BC. Perchè il sistema sia in equilibrio, deve aversi:

$$R \times AB = P \times BC, \text{ da cui } R = P \frac{BC}{AB} = P \text{ tg } \alpha.$$

Per calcolare Q, consideriamo ancora il sistema ABC come una leva, ma col fulcro in B. La reazione in A alla forza di trazione secondo AC, uguaglierà Q in grandezza ed agirà col braccio BG, mentre il peso P agisce col braccio BC. Per l'equilibrio deve essere: $Q \times BG = P \times BC$; e poichè $BG = AB \text{ sen } \alpha$ e $BC = AB \text{ tg } \alpha$, sostituendo si avrà $Q = \frac{P}{\cos \alpha}$.

Caso VIII. Se oltre $\gamma = 90°$, fosse $\alpha = \beta$, allora $R = Q = P \operatorname{sen} 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071\ P$.

3. Le formule che forniscono R e Q nel caso VI sono riportate in una recente Memoria (1) ed hanno richiamata l'attenzione d'un valente sismologo, il quale me ne parlò come se fossero addirittura errate. La mia sorpresa non fu poca nel riconoscere che si trattava proprio di due formulette, da me pubblicate in questi stessi Rendiconti (2), e dessa si accrebbe quando volendo, lì per lì, verificarle, mi parvero realmente errate! Ma poi, non sapendo capacitarmi come mai fossi stato indotto in un equivoco madornale in un problema così semplice, vi pensai meglio e dovei riconoscere che le due formule sono esatte, almeno nel caso speciale cui si riferiscono (caso VI), mentre il critico evidentemente equivocava col caso VII. L'enorme differenza, infatti, che salta fuori per R e Q, quando $\alpha = 90°$, deriva appunto dalla diversa disposizione che si vuol dare allo strumento. Nel caso VI è evidente che, dovendo il braccio BC restare orizzontale, bisogna che al pari di AC diventi infinitamente lungo al limite di $\alpha = 90°$, ed allora si concepisce come lo sforzo in A e B possa effettivamente ingrandire senza limiti. Nel caso VII, invece, dovendo restare $AC \perp BC$, C finisce per cadere in A, per $\alpha = 90°$, ed allora nel pendolo, divenuto *rovescio*, ogni sforzo cessa in A e si accumula tutto in B divenendo uguale a P. Quest'ultimo caso, invero, è quello che si presenta per il primo alla mente, ed è analogo a quello d'un pendolo verticale $AB = AC$ deviato sempre più dalla sua posizione di riposo, ed il cui peso viene decomposto in due componenti: l'una secondo la direzione inclinata del pendolo, l'altra $\perp$ alla stessa. In queste condizioni, finchè α è piccolo, Q ed R non possono differire troppo dai valori che risulterebbero nei casi VI e VII; ma col crescere di α, se si vuol continuare nell'analogia e mantenere invariabile AC (lunghezza del pendolo verticale), bisognerebbe spostare sempre più in basso il punto B, in modo da far restare $BC \perp AC$, finchè per $\alpha = 90°$, BC diverrebbe infinitamente lungo e parallelo all'asse stesso di rotazione, alla distanza appunto di AC, finendo col sostenere da solo l'intero peso P, mentre si annulla completamente la tensione in AC.

Ho ritenuto utile l'insistere su questo equivoco, in cui facilmente anche altri potrebbe cadere, ed ho presa l'occasione per trattare il problema in limiti alquanto più estesi e tali da comprendere tutti i possibili casi che si possono incontrare nella pratica.

4. In una prossima Nota mi riserbo di far conoscere un potente pendolo orizzontale oscillante in direzione N-S che, dopo varî tentativi, sono riuscito a far funzionare fin dall'agosto 1916, sebbene in via provvisoria, nel R. Osser-

(1) Giov. Batt. Alfano, *Sull'uso degli apparecchi pendolari in sismometria* (Atti dell'Acc. Napoletana scient.-lett. « S. Pietro in V. », vol. IV, pag. 109).

(2) *Sismoscopio a doppio pendolo orizzontale per terremoti lontani* (Seduta del 17 dic. 1905).

vatorio Geodinamico di Rocca di Papa. Il nuovo strumento presenta attualmente una massa pendolare di quasi tre tonnellate (costituita, per economia, di pezzi di lava accatastati sopra una solida piattaforma in travetti di ferro) la quale oscilla con un periodo di c. 15 secondi e, mediante una speciale e leggerissima leva di paglia, registra i suoi movimenti sopra una zona affumicata con un ingrandimento di più che 100 volte. Per mezzo di cosifatto pendolo è stato possibile registrare *la fase a onde lente* di molti terremoti lontani la quale, per la sua lievissima entità, sfuggiva agli altri apparati.

Quando si abbia da fare con masse pendolari così enormi (e spero di sorpassare l'attuale peso nella costruzione dei due pendoli definitivi ad angolo retto tra loro), si comprende l'importanza della valutazione non solo degli sforzi notevolissimi, cui si trova assoggettato il materiale da costruzione del quale si può disporre, ma soprattutto delle reazioni nei punti di sostegno, se vuolsi dare al pendolo orizzontale la massima delicatezza, a parità di massa, di periodo e d'ingrandimento.

Chimica. — *I giacimenti di sali potassici di Dallol* (Eritrea) [1]. Nota di M. Giua, presentata dal Socio E. Paternò.

Da vario tempo è stata richiamata l'attenzione degli studiosi sui giacimenti di cloruro di potassio di Dallol nella Dancalia settentrionale (Eritrea). Il problema della potassa ha interessato le Nazioni dell'Intesa dopo lo scoppio dell'attuale conflagrazione mondiale per la chiusura del mercato tedesco, unico fornitore di sali potassici. Come è noto i giacimenti di fama mondiale di Stassfurt e di Wittelshain (Alsazia) hanno costituito fino a questi ultimi anni una sorgente straordinaria di ricchezza per la Germania. Con lo scoppio della guerra europea anche in Italia si è cercato di utilizzare, come sorgente di sali potassici, le acque madri delle saline e a questo riguardo si sono fatti, nel campo chimico, studî numerosi ed interessanti.

Se nonchè i giacimenti naturali di sali potassici sono ancora così diffusi nelle varie parti della superficie terrestre e possono quindi alimentare tutti i bisogni delle industrie chimiche ed agricole, che tali studî presentano più un interesse teorico e momentaneo, dato lo stato abnorme creato dalla guerra, che pratico.

In Spagna, nella provincia di Barcellona, è stata segnalata recentemente la scoperta di giacimenti di sali potassici; questi sono in vicinanza dei depositi naturali di salgemma di Suria. I minerali principali potassici sono la carnallite e la silvina, ma i giacimenti, che datano dalla fine dell'eocene

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Sassari.

o dal principio dell'oligocene, sono molto irregolari. Comunque, scoppiata la guerra europea, l'estrazione della potassa da questi depositi di sali ha subìto alternative di varia sorta, il che ha contribuito a paralizzare lo sfruttamento di tali giacimenti.

Negli Stati Uniti d'America il problema dei sali potassici va acquistando sempre più importanza, per quanto numerosi siano i giacimenti naturali, come le sorgenti dei laghi salati di Nebraska e i depositi salini di altre regioni. Recentemente in America è stata studiata anche l'estrazione della potassa da alcuni minerali, come i feldspati; ma da una statistica fornita per il 1916 dall' « United States Geological Survey » (1) si ricava che su 5.216.314 tonn. di potassa di origine minerale prodotta, circa 4.000.000 di tonn. provengono dai sali naturali, sopra tutto dai laghi salati di Nebraska.

Dopo lo scoppio dell'attuale conflagrazione, in Eritrea sono stati scoperti importanti giacimenti di sali potassici che potranno costituire anche nell'avvenire, per la nostra Nazione, una sorgente notevole di ricchezza. In una intervista recente (2), S. E. il Ministro delle Colonie onor. Colosimo, ha chiaramente riconosciuta l'importanza di tali giacimenti, dicendo: « Si è per la circostanza largamente intensificato lo sfruttamento delle miniere di potassa di Dallol, nella Dancalia settentrionale, e ingenti partite di questo minerale sono state esportate non solo in Italia ma anche in Francia, in Inghilterra e perfino nel Giappone. A guerra finita il cloruro di potassio, che in quantità rilevantissima continuerà a esportarsi dall'Eritrea, troverà certo larga utilizzazione come materia fertilizzante per le pratiche agricole ».

Qualche mese fa ho avuto occasione di analizzare un grande numero di campioni di minerali salini provenienti dai giacimenti di Dallol, minerali fornitimi dal sig. D. Maggiora, che ha studiato in sito, lungamente, l'importanza industriale delle miniere di Dallol. Avendo avuto la necessaria autorizzazione rendo conto pubblicamente delle analisi da me fatte su molti campioni di sali di potassio e di sodio delle miniere di Dallol; in questa prima Nota riassumo i risultati da me ottenuti nello studio della composizione chimica dei minerali salini più importanti (vedi tabelle I e II).

Circa l'analisi di questi minerali ho seguite le norme indicate dal Villavecchia nel suo recente *Trattato di chimica analitica applicata* (3); in realtà le determinazioni eseguite hanno un carattere eminentemente pratico, e però il mio còmpito per ora è stato limitato alla determinazione quantitativa dei sali solubili in acqua; riguardo all'analisi del residuo insolubile, che in alcuni campioni raggiunge un valore notevole, mi sono fermato a saggi orientativi. I campioni salini di cui è stato riportato il quadro analitico presentano tutti, salvo qualche lieve eccezione, una grande omogeneità

(1) Cfr. Boll. mensile di inform. agrarie dell'Ist. Intern. di Agricoltura, 1017, n. 6.
(2) « Tribuna » di Roma del 30 gennaio 1918.
(3) Vol. I, pp. 165, 178 e segg., 1916, Hoepli, Milano.

nella composizione della parte insolubile in acqua. Detto residuo è formato per più del 90 % di ossido idrato di ferro con tracce di solfo (libero), di ossido di alluminio e di silice. La determinazione del potassio è stata eseguita col metodo ordinario all'acido perclorico.

TABELLA I.

Numero del campione	Cloruro di potassio	Cloruro di sodio	Cloruro di magnesio	Solfato di magnesio	Solfato di calcio	Umidità	Parte insolubile in acqua
1	72.53	25.20	0.75	0.30	0.27	0.20	0.05
2	98.60	0.50	0.20	0.20	0.15	0.18	0.03
3	97.75	1.20	0.15	0.20	0.30	0.12	0.06
4	90 10	1.20	0.42	—	0.17	0.28	7.41
5	44.50	53.20	0.18	—	0.09	0.15	1.48
6	97.50	0.80	0.17	0.20	0.40	0.50	0.08
7	23.00	74.10	0.15	—	0.06	0.22	1.93
8	53.53	38.60	2.04	0.60	2.15	0.35	1.75
9	82 86	14.70	0.40	0.25	0.26	0.70	0.20
10	97.50	—	0.06	—	0.05	0.38	1.80
11	41.20	48.35	0.21	2.01	—	0.14	7.60
12	92.35	—	—	—	—	0.45	7.00
13	72.10	24.30	0.09	—	0.05	0.17	2.87
14	94.45	1.02	0.14	0.09	0.04	0.08	4.15
15	87.10	0.50	0.35	—	0.12	0.40	11.00

TABELLA II.

Numero del campione	Cloruro di sodio	Cloruro di potassio	Cloruro di magnesio	Solfato di magnesio	Solfato di calcio	Solfato di sodio	Umidità	Parte insolubile in acqua
16	96.03	—	0.70	1.40	0 12	—	0.20	1.14
17	76.10	1.45	0.40	0.18	0.20	—	0.28	20.64
18	87.62	1.05	0.30	0.45	0.10	—	0.25	9 25
19	97.92	—	0.32	0.07	0.23	—	0 30	0.18
29	97.81	—	0.24	—	0.16	1.05	0.21	0.02
21	94.20	0.60	1.02	0.27	0.12	—	0.23	3.10
22	98.34	—	0.41	0.20	0.09	—	0.22	0.03
23	96.30	—	0.41	—	0.13	2.53	0 32	0.04
24	98.35	—	0.20	0.50	0.32	—	0.20	0.14
25	61.03	1.96	0.35	—	1.02	—	0.46	34.49
26	88.00	0.70	0.15	—	0.96	2.25	0.38	7.00
27	51.45	—	0.21	—	0.75	0.35	0.42	46.65
28	63.00	—	0.35	—	0.52	0.34	0.37	34.96
29	62.50	2.00	0.30	—	0.40	—	0.45	34.00
30	54.00	—	0.20	—	0.63	0.25	0.39	43.08
31	59.97	—	0.34	—	1.22	0.30	0.41	37.19
32	6.00	—	0.30	—	1.10	0.70	0.45	80.97

IMPORTANZA DEI SALINI POTASSICI DELLA MINIERA DI DALLOL.

Qualunque riserva di sali potassici costituisce una fonte di ricchezza, ma l'importanza della miniera di Dallol (1) risalta subito quando, in base

(1) M. G. Levi (*Atti del Comitato per le industrie chimiche*, 1917, pag. 61) ha accennato all'importanza dei giacimenti salini di Dallol.

ai dati analitici dianzi riportati, si confrontino i giacimenti di sali potassici oggi conosciuti e sfruttati industrialmente.

Anzitutto è bene porre in rilievo come questi forti giacimenti di sali potassici derivino dal mare che, insieme al Mar Morto, risulta più ricco di sali potassici, ossia dal Mar Rosso. Nella tabella seguente si riportano alcuni dati sulle acque dei mari più importanti:

Mari	Parti di cloruro di potassio in un milione di parti d'acqua
Adriatico (Laguna veneta)	833
Baia di Leghorn	1111
Mediterraneo	505
Mar Rosso	2880

Come si è detto i principali giacimenti di sali potassici oltre a quelli di Stassfurt sono quelli di Wittelshain, di Santander (Spagna) e di Tarapan (Kilì). Per la loro importanza i giacimenti di Ballol possono solo confrontarsi con quelli di Stassfurt. Non è quindi inutile fare prima una breve descrizione di questi giacimenti.

Salini della ricchezza di quelli della miniera di Dallol si ottengono a Stassfurt dopo una lunga escavazione; tanto che per avere sali potassici del contenuto in cloruro intorno al 98-99 % occorre lavorare convenientemente i minerali misti qui sotto accennati. I depositi naturali di sali potassici occupano un enorme bacino della Germania del Nord; oltre Strassfurt si trovano sali potassici anche a Speremberg presso Berlino e a Segerberg presso Lubek. Tali giacimenti sono profondi e appunto in profondità si distinguono le seguenti regioni:

1°. Regione di anidride o rock-salt; detto così dal solfato di calcio anidro che divide il rock-salt in due strati.

2°. Regione della polihalite; il rock-salt è mescolato con polihalite e vi è presente cloruro di magnesio insieme a piccole quantità di solfo e sostanze bituminose.

3°. Regione della kieserite: presenta molto solfato di magnesio. La miscela ha la composizione ssguente; 65 % rock-salt, 17 % kieserite, 13 % carnallite, 3 % bischofite e 2 % anidride.

4°. Regione della carnallite (sali di Stassfurt più notevoli). Contiene il 25 % di rock-salt, 16 % di kieserite e 4 % di cloruro di magnesio, bromuro di magnesio, boracite e ossido di ferro. In alcune parti però per l'azione dell'acqua è stato asportato quasi tutto il cloruro di magnesio e si ha una miscela contenente il 20 % di cloruro di potassio (silvina pura) con 30-40 % di rock-salt ed eguale quantità di kieserite ed altre impurezze (1).

(1) G. Martin, Smith e Milsom, *The Salt and Alkali Industry — Potassium Salts and the Stassfurt Industry*, pag. 83, London, 1916.

Secondo un grande chimico e geologo, il Bischof, la vera composizione dei depositi di Stassfurt è la seguente:

Rock-salt	85,1 %
Anidride	3,7 »
Polihalite	0,8 »
Kieserite	3,3 »
Carnallite	6,2 »
Cloruro di magnesio	0,9 »

Nella miniera di Dallol i minerali potassici affiorano alla superficie terrestre e per quanto localizzati in alcuni punti della intiera regione salina costituiscono depositi enormi e ricchissimi. Lo studio geologico di questo immenso bacino salino dell'Eritrea renderà naturalmente grandi utilità circa un razionale sfruttamento, anche dal punto di vista chimico. La purezza dei minerali nativi analizzati indica non più una formazione stratigrafica dei depositi salini stessi, bensì una separazione netta fra i singoli minerali che costituiscono i giacimenti cennati. Ma un altro fatto è da notare: dei salini sia potassici che sodici analizzati solo pochi contengono tracce di bromuro e tutti indicano un basso contenuto in cloruro di magnesio. Orbene, i sali a base di magnesio sono anch'essi localizzati. Esistono a Dallol alcune sorgenti termali (temp. uguale circa 80-90°) che contengono molto cloruro di magnesio; dette acque sono soluzioni sature, alla temperatura indicata, del sale di magnesio, con tracce di cloruro di sodio e quantità notevoli di bromuro di magnesio. Alla temperatura ordinaria queste acque si rapprendono in una massa solida, colorata in giallo per la presenza di tracce di ossido di ferro.

Acque sature di cloruro di magnesio alla temperatura ordinaria (40° circa) esistono pure a Dallol, esse contengono pure quantità notevoli di bromo.

In una prossima Nota spero di poter riferire sulla composizione chimica di queste acque, come pure di molti altri minerali contenenti molto solfato di calcio, ciò che varrà a porre maggiormente in luce la natura dei giacimenti salini di Dallol.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Bottini. *Sfagnologia italiana.* Pres. dal Socio Pirotta.

Comucci. *Sullo zolfo dell'isola di Taso.* Pres. dal Corrispondente F. Millosevich.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Marchiafava relatore, a nome anche del Socio Foà, legge una relazione sulla Memoria dei professori Mingazzini e Giannuli, avente per titolo: *Contributo clinico ed anatomico patologico sulle aplasie emicerebellari*, proponendo l'inserzione del lavoro negli Atti accademici.

La proposta della Commissione è approvata dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente Ròiti dà il triste annuncio di due gravi perdite subìte dall'Accademia in questi giorni, nelle persone dei Soci prof. Ernesto Monaci (che fu Segretario della Classe di scienze morali), e prof. Paolo Pizzetti.

Il Socio Reina legge la seguente Commemorazione del Socio Nazionale prof. Paolo Pizzetti.

Il 14 aprile ultimo scorso, a soli 57 anni di età, spegnevasi in Pisa il prof. Paolo Pizzetti docente di Geodesia e di Meccanica celeste in quella Università. Colpito da una polmonite alla vigilia di Pasqua, soccombeva dopo due settimane alla violenza del male, lasciando nella costernazione la famiglia, i colleghi, i numerosi estimatori del suo ingegno e del suo nobile carattere.

Nato a Parma il 24 luglio 1860, ventenne appena veniva nel 1880 laureato nella Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Roma, e, seguendo la naturale inclinazione che lo portava a dedicarsi agli studî, Egli restava nella Scuola stessa quale assistente alla cattedra di Geodesia. In quell'epoca i professori Pisati e Pucci avevano iniziate le loro memorabili ricerche sul valore assoluto della gravità, dedicandovi tutte le risorse dei due Gabinetti riuniti di Fisica tecnica e di Geodesia. Per sottrarsi alle azioni perturbatrici provenienti dal traffico cittadino, essi compievano durante la notte le loro delicate misure, ed il Pizzetti, subito chiamato a prestare la sua collaborazione, veniva assegnato alle osservazioni astronomiche. Datano da quell'epoca le determinazioni di latitudine da lui compiute, a mezzo di un Universale di Bamberg e riassunte in due appendici della Memoria, *Sulla lunghezza del Pendolo a secondi*, presentata alla Accademia dei Lincei nel 1883 dagli stessi professori Pisati e Pucci.

Della medesima epoca è l'altra pubblicazione, pur di carattere prevalentemente astronomico, *La determinazione degli azimut*, volume nel quale con ampiezza e chiarezza è esposto un argomento che, solo sommariamente, trovavasi di solito trattato nelle Opere di Astronomia pratica e sferica, quello cioè dei metodi di orientamento. Oltre ai procedimenti usati nell'alta Geodesia, sono sviluppati quelli applicabili con strumenti topografici e magnetici. Qua e là in questo volume, di carattere prevalentemente didattico, si trovano però idee originali, come la proposta modificazione al classico metodo di Struve, consistente nella determinazione contemporanea del tempo e dell'azimut per mezzo della misura delle differenze azimutali fra la Polare ed una stella fondamentale.

Il prof. Pizzetti non era però, per sua natura, particolarmente portato verso i lavori di osservazione. Nelle determinazioni di tempo ad esempio, nelle quali si tratta di cogliere l'attimo fuggente del passaggio della immagine di una stella sotto i fili del reticolo, occorre una padronanza del proprio sistema nervoso, che spesso non corrisponde alla calma e serenità del carattere. Lo stesso scrupolo posto nell'osservare è causa di turbamento, ed il Pizzetti, come egli stesso ebbe occasione di dichiararmi, non riesciva a vincere la propria agitazione. Se scarso è il contributo da lui portato alla Geodesia italiana nel campo delle osservazioni, tanto più ricca è la messe dei frutti raccolti nel campo teorico.

Oltre a quelli sopra accennati, aventi carattere astronomico, appartengono al periodo del soggiorno di Roma altri lavori rientranti nel dominio della Geometria differenziale, come quello sulla *curva di allineamento* (luogo dei punti dell'ellissoide terrestre nei quali la normale condotta alla superficie è in uno stesso piano coi due estremi della curva) e le due Note dei Lincei, *Sulle rappresentazioni geografiche conformi*, nelle quali sono trattati due casi particolari interessanti di carte geografiche che conservano gli angoli.

Nel dicembre 1886, in seguito a concorso, Egli veniva nominato professore straordinario di Geodesia nella Università di Genova. I primi anni di quel suo nuovo soggiorno sono specialmente dedicati allo studio della combinazione delle osservazioni. Con acuto spirito critico egli esamina i principî sui quali è basata la teoria; analizza i procedimenti e le formole usate; suggerisce modifiche e semplificazioni; discute tutto il metodo cosiddetto dei minimi quadrati e, desideroso di raccogliere tanto lavoro sparso in numerose Note, due volte si accinge a riassumerlo: una prima volta in una Memoria inserita negli Atti de la Société Royale de Liège, *Sur le calcul du résultat d'un système d'observations directes* (1888), ed una seconda volta in un volume, *I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali*, facente parte degli Atti pubblicati dalla Università di Genova nella occasione del Centenario Colombiano (1892).

In questo poderoso lavoro il prof. Pizzetti, mirando alla parte fondamentale o filosofica della teoria, si propone di costruirla su postulati che veramente abbiano un carattere sostanziale e razionale. Nella prima parte della pubblicazione schizza arditamente il quadro della teoria, partendo dal concetto dell'errore di osservazione dovuto a Thomas Joung, cioè che esso possa considerarsi come generato dalla sovrapposizione di un gran numero di errori infinitesimi, dovuti a cause indipendenti e soggette a leggi affatto arbitrarie; dimostra come, col crescere indefinito del loro numero, la probabilità che l'errore cada entro certi limiti tenda ad avere per espressione analitica la consueta esponenziale di Gauss, generalizzata però nel senso che la grandezza dell'errore vi appare diminuita di una costante (parte costante dell'errore). Adottando questa formola, stabilisce in modo non dissimile dall'ordinario i concetti di *misura di precisione*, *errore medio*, *errore probabile*.

In un secondo capitolo esamina i principî stabiliti da alcuni autori come fondamento della teoria degli errori; confronta il principio della *probabilità massima*, dopo l'esempio di Gauss adottato dalla maggior parte dei trattatisti, con quello del *massimo rischio di errore*, formulato già da Laplace, ed apertamente si pronuncia in favore di quest'ultimo. Discute poi i postulati sopra i quali diversi autori, in particolare Encke, Stone, Schiaparelli, tentarono di fondare il principio della media aritmetica, pervenendo alla conclusione che nessuno di essi presenta quel carattere di generale evidenza, necessario per legittimare una dimostrazione del principio in parola. Esamina poi le dimostrazioni colle quali i diversi scrittori pervennero alla legge esponenziale di distribuzione degli errori; critica il procedimento primo di Gauss, esposto nella *Theoria motus corporum coelestium*; analizza le dimostrazioni di Adrain, di W. Herschell, di Donkin, tutte di natura semplice ma non sufficientemente rigorose, e, tornando al principio formulato prima di Joung e svolto in seguito da Hagen, da Quetelet e da Bessel, unitamente agli scrittori inglesi Glaisher, Airy, Crofton, esprime la convinzione doversi tale principio ritenere come l'unica vera base filosofica sulla quale può erigersi la teoria degli errori.

La seconda parte del volume è dedicata alla *Combinazione delle osservazioni indirette*. Supponendo cioè che ω incognite fisiche siano legate da n equazioni lineari ($n > \omega$) i cui coefficienti siano dati dalla osservazione, il prof. Pizzetti formula it problema nel senso di dover determinare il *sistema di valori più convenienti*, invece del *sistema di valori più probabili*, ed è condotto ad una forma di trattazione semplice ed elegante che può ritenersi, per così dire, inversa di quella tenuta da Gauss e solitamente seguita.

Nel 1900 il prof. Pizzetti, chiamato dalla Facoltà matematica della Università di Pisa, lasciava Genova per trasferirsi sull'Arno, e qui assiduamente proseguiva un'altra categoria di studî sui quali già aveva pubblicata

una serie di Memorie; quella riguardante le relazioni fra la gravità e la forma della superficie esteriore di equilibrio di una massa materiale rotante. Anche in questo campo, dopo aver studiato l'argomento sotto varî aspetti, raccoglieva i risultati delle sue ricerche in una più grossa pubblicazione riassuntiva, *Principî della teoria meccanica della forma dei pianeti* (1913), preziosa per chi voglia addentrarsi in tale studio, senza dover consultare troppe Memorie sparse in Riviste ed Atti accademici.

Il prof. Pizzetti pone a base della ricerca il cosiddetto *problema di Stokes*, consistente nel determinare la funzione potenziale esterna di un pianeta, quando siano note la forma di una superficie di equilibrio esteriore, la massa e la velocità angolare di rotazione, e lo risolve nel caso dell'ellissoide di rotazione schiacciato, trovando la esatta relazione fra la gravità polare e la equatoriale, relazione che riproduce il noto teorema di Clairaut, quando vi si trascurino i termini piccoli d'ordine superiore al primo. Analoga ricerca estende all'ellissoide a tre assi, sempre indipendentemente da ogni supposizione sulla interna distribuzione della massa.

Stabilisce poi la *formola di Stokes* che determina le ondulazioni del Geoide rispetto all' Ellissoide di riferimento terrestre, quando su tutta la superficie della Terra si suppongano note le anomalie della gravità, cioè le differenze fra gli effettivi valori della gravità superficiale e quelli calcolati nella ipotesi della superficie di equilibrio ellissoidica. Tale formola viene di solito stabilita ricorrendo allo sviluppo della funzione potenziale in serie procedente secondo le potenze negative del raggio vettore: ma questa serie, certamente valida all'esterno di una sfera comprendente tutta la massa, non conserva teoricamente la sua validità fino alle superficie di equilibrio, per cui la legittimità del procedimento è soggetta a qualche dubbio. Il prof. Pizzetti, e questo è il merito principale del suo lavoro, riesce ad evitare l'impiego di quello sviluppo, ricorrendo a noti teoremi sulla teoria del potenziale. e conferisce così semplicità e maggior rigore alla sua trattazione.

A queste ricerche si ricollega un altro gruppo di lavori riguardanti le possibili distribuzioni di massa nell' interno della Terra. In questi lavori, pure ammettendo che dalla conoscenza della forma del Geoide e della gravità alla sua superficie poche notizie possono ricavarsi sui diversi modi possibili di variazione della densità interna, si stabiliscono per altro delle condizioni o limitazioni cui tali distribuzioni di densità debbono sottostare.

Nel campo dei lavori di carattere gravimetrico rientra la Memoria sul calcolo delle attrazioni locali dovute alle irregolarità apparenti della massa terrestre, nella quale è indicato un ingegnoso metodo grafico per fare il computo delle attrazioni in parola, metodo del quale il prof. Pizzetti fece più tardi applicazione per ridurre a livello del mare la gravità determinata sul Monte Bianco. Ed allo stesso ordine di ricerche appartengono in ultimo le due Note concernenti le correzioni da far subire alle latitudini e longi-

tudini osservate per ridurle a livello del mare, intendendo che lo spostamento abbia luogo lungo le linee di forza del campo gravimetrico.

Un altro argomento studiato con grande amore è quello della rifrazione terrestre ed astronomica. Premesso in una prima Memoria uno studio generale delle traiettorie luminose, Egli determina in un secondo lavoro una espressione approssimata della rifrazione sferoidica laterale, mostrando come essa risulti dal prodotto della differenza fra azimut astronomico ed azimut geodetico per il *coefficiente di rifrazione*, e dando così una ragione teorica del fatto per il quale tanto difficilmente essa può venir constatata in base alle osservazioni. Studia in un lavoro successivo la legge di variazione della rifrazione astronomica, quando si supponga che temperatura e pressione atmosferica siano legate dalla relazione empirica stabilita da Mendeleef in seguito alle ascensioni aerostatiche compiute da Glaisher, e dimostra infine in un'ultima Nota, caratteristica per acume di spirito critico, qual piccola influenza abbia il modo di variazione della densità atmosferica secondo l'altezza nel calcolo della rifrazione, e come le diverse ipotesi fatte al riguardo non possano quindi condurre a risultati molto dissimili.

Molti sono i lavori geodetici di carattere strettamente geometrico che studiano le proprietà metriche di figure tracciate sopra una superficie qualunque o sull'ellissoide terrestre, ed in particolare, dal punto di vista delle applicazioni, meritano di essere ricordati quelli che riguardano le deformazioni subìte da triangoli geodetici trasportati da una superficie ad un'altra conservando la lunghezza dei lati, e che stabiliscono il grado di precisione conseguibile nel risolvere i triangoli stessi.

Su tali ricerche il prof. Pizzetti ritornò più volte negli ultimi anni, ed anche recentemente in occasione di una Memoria pubblicata dal prof. Severi, precisando i limiti superiori delle differenze fra gli elementi delle figure superficiali e quelli delle figure corrispondenti su sfere opportunamente scelte.

I principali risultati delle sue ricerche Egli introdusse anche nel suo *Trattato di Geodesia teoretica* che, nella sua compendiosa semplicità, costituisce un bel quadro sintetico delle teorie geodetiche che oggi più importa far conoscere nell'insegnamento universitario. Un quadro informato a criterî più comprensivi, e ricco di notizie bibliografiche, è l'altro inserito nella Enciclopedia delle scienze matematiche, e già pubblicato tanto nella edizione tedesca quanto in quella francese.

Nel 1901, subito dopo il suo trasferimento a Pisa, il prof. Pizzetti veniva incaricato dell'insegnamento della Meccanica celeste. Da esso traeva argomento di alcune pregiate pubblicazioni, concernenti in special modo il *problema degli n corpi*.

Per ben comprendere il valore dell'opera scientifica del prof. Pizzetti, conviene ricordare quali erano le condizioni degli studi geodetici in Italia

40 anni or sono. La Geodesia era un insegnamento fondamentale nelle Facoltà di Scienze, obbligatorio per gli allievi-ingegneri, ma di fatto non comprendeva che i soliti metodi topografici, coll'aggiunta di poche nozioni complementari sulla Geometria ellissoidica. Il contributo scientifico dei docenti dell'epoca era pressochè nullo.

Nel 1880 venivano pubblicati (nella 3ª edizione) i *Principii di Geodesia* del prof. Schiavoni della Università di Napoli, e questi costituivano la più alta manifestazione che si avesse allora nel campo geodetico, soprattutto perchè lo Schiavoni che faceva parte della Commissione per la misura dei gradi in Europa, sorta da poco, con lodevole ampiezza vi trattava il problema della determinazione delle costanti dell'ellissoide terrestre, e dava notevole sviluppo alla teoria dei minimi quadrati e loro applicazioni.

Poco dopo, fra il 1883 ed il 1886 venivano pubblicati i *Fondamenti di Geodesia* del prof. Pucci. Essi rappresentavano un volo rispetto ad ogni pubblicazione anteriore: il problema della determinazione del Geoide vi era posto nella sua maggior generalità, ed i metodi classici per costruire le onde geoidiche rispetto all'ellissoide di riferimento, vi erano largamente esposti insieme alle ricerche originali dell'autore. In pari tempo animato dalla fede più viva, partecipe del vigoroso risveglio manifestato in quel momento da ogni attività scientifica, il prof. Pucci coraggiosamente si dedicava alle delicate ricerche sopra ricordate, concernenti la determinazione della gravità assoluta.

Sorgeva a questa scuola il prof. Pizzetti e ne riceveva forte impulso animatore: amante dello studio, fornito di buona cultura matematica, dotato di mente lucida, l'un dopo l'altro affrontava i multiformi problemi del campo geodetico, e con instancabile attività, con lavoro assiduo che copre un periodo estendentesi dal 1883 fino a questi ultimi mesi, in tutti gli argomenti portava il contributo del suo ingegno fresco e versatile.

Le funzioni di professore universitario rappresentarono per il Pizzetti un sacerdozio ed un apostolato; — alla Scienza con lavoro indefesso di tutti i giorni, di tutte le ore, con un sentimento quasi di religiosa devozione, dedicò il fiore dell'operosa intelligenza; — agli allievi distribuì i frutti degli studî propri, per aiutarli a pervenire agli estremi confini della scienza, dai quali è possibile ai più forti spiccare il volo verso regioni ancora inesplorate.

Semplice, austero, alieno dagli onori, ma giustamente orgoglioso di appartenere alla Università pisana, per lunga tradizione tanto benemerita degli studî matematici, serenamente passò; ma il nome suo, che da oltre 7 lustri continuamente ricorre nei severi annali della Scienza, vi è oramai impresso a caratteri non perituri.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI

del prof. Paolo Pizzetti.

1. « Sulla curva d'allineamento ». Giorn. di Battaglini, XXI, 1883.
2. « Sopra un metodo per la determinazione della latitudine astronomica ». Mem. Acc. Lincei, ser. 3ª, vol. XV, Roma, 1883.
3. « Sulle rappresentazioni geografiche conformi ». Nota I e II, Rendic. Acc. Lincei, luglio 1885.
4. « La determinazione degli azimut, metodi per l'orientamento cogli strumenti geodetici e topografici », pag. XIV, 271, Roma, Loescher, 1886.
5. « Un teorema relativo all'errore medio di una funzione di quantità determinate dall'esperienza ». Rend. Acc. Lincei, giugno 1886.
6. « Sulla compensazione delle osservazioni secondo il metodo dei minimi quadrati ». Nota I e II, Rend. Acc. Lincei, 2° sem. 1887.
7. « Sur le résultat le plus convenable d'un système d'observations directes ». Mém. de la Soc. R. des Sciences de Liège, 2e sér., t. XV, 1887.
8. « Contribuzione allo studio geometrico della superficie terrestre ». Giorn. Società Letture e conversazioni scientifiche, Genova, 1887.
9. « Gli azimut reciproci di un arco di geodetica ». Atti Acc. Sc., Torino, 1888.
10. « Sopra una generalizzazione del principio della media aritmetica ». Rend. Accad. Lincei, 1° sem. 1889.
11. « Sopra una certa formola esprimente la probabilità degli errori d osservazione ». Rend. Acc. Lincei, 1° sem. 1889.
12. « Alcune ricerche sulla probabilità *a priori* degli errori d'osservazione «. Giorn. di Battaglini, vol. XXVII, 1889.
13. « Sopra il calcolo dell'errore medio di un sistema d'osservazioni ». Rend. Acc. Lincei, 1° sem. 1889.
14. « Sopra il calcolo della refrazione terrestre ». Rend. Acc. delle Scienze, Torino, 1889.
15. « Sur la théorie des observations arrondies ». Astron. Nachrichten, Bd. 124, Kiel, 1890.
16. « Sulle traiettorie dei raggi luminosi ». Ateneo Ligure, Genova, Ciminago, 1890.
17. « Nota relativa alla statistica matematica ». Atti della Soc. Ligustica di Sc. Natur. e Geogr., vol. II, 1891, Genova.
18. « Sur le calcul des triangles géodésiques ». Mém. de la Soc. « Alzate », Mexico, 1891.
19. « Nota relativa all'uso della così detta formola esponenziale nella statistica matematica ». Ateneo Ligure, 1891, Genova.
20. « La legge di probabilità degli errori d'osservazione ». Rend. Accad. Lincei, 1° semestre 1892.
21. « Fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali ». Un volume di pag. 214 negli Atti dell'Università di Genova, pel centenario Colombiano, Genova, Sordomuti, 1892.
22. « Gli odierni studî sulla figura della terra ». Discorso letto nella solenne inaugurazione degli Studî all'Università di Genova il 1° dicembre 1892, Genova, Martini, 1893.
23. « Calcolo grafico delle attrazioni locali ». Atti Soc. Ligustica di Sc. nat., vol. IV, 1893, Genova.
24. « Sulla espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellissoidico ». Nota I e II, Rend. Acc. Lincei, 1° sem. 1894.

25. « Sullo stesso argomento » in Astron. Nachrichten, Bd. 135, Kiel, 1894.
26. « La determinazione della gravità terrestre ed il loro presente contributo alle nostre conoscenze sulla figura della terra ». Rivista Geografica italiana, dicembre 1894.
27. « Sviluppo in serie relativo alle geodetiche dell'ellissoide di rotazione schiacciato », Atti Acc. delle Scienze Torino, vol. XXX, 1895.
28. « Sur la réduction des latitudes et des longitudes astronomiques au niveau de la mer ». Astr. Nachr. Bd. 138, 1895.
29. « Intorno alla effettiva determinazione della superficie di livello terrestre entro regioni limitate ». Rend. Acc. Lincei, 2° sem. 1895.
30. « Osservazioni intorno alla Nota del prof. Nobile (abbreviazione al calcolo di una linea geodetica etc. »). Rend. Acc. Sc. fis. matem. Napoli, marzo 1896.
31. « Sopra un punto della teoria di Laplace relativa alla figura di equilibrio di una massa fluida rotante ». Rend. Acc. Lincei, 1° sem. 1896.
32. « Intorno alla determinazione teorica della gravità sulla superficie terrestre ». Atti Acc. Torino, vol. XXXI, 1896.
33. « Sopra un modo di calcolare la lunghezza di un arco di geodetica date che siano le coordinate geografiche degli estremi di esso ». Rivista di Topografia e Catasto, vol. IX, 1897.
34. « Sopra alcune misure di base eseguite dall'Istituto geodetico prussiano ». Rivista Topogr. e Catasto, vol. X, 1897.
35. « La rifrazione astronomica calcolata in base alla ipotesi di Mendeleef sulla distribuzione verticale della temperatura dell'aria ». Atti Acc. Torino, vol. XXXIII, 1898.
36. « Sullo stesso argomento ». Astronomische Nachrichten, Bd. 146, Kiel, 1898.
37. « Sui poliedri deformabili ». Rend. Acc. Lincei, 2° sem. 1898.
38. « Della influenza delle deformazioni elastiche sulla durata di oscillazione di un pendolo, secondo Helmert ». Nuovo Cimento, Pisa, 1898.
39. « Recensione dell'opera 'Einführung in die math. Behandlung der Natuswissenschaften' di W. Nernst e A. Schönflies ». Boll. Bibl. e Storia delle Sc. matem. Torino. 1898.
40. « La gravità sul Monte Bianco » Nota I e II, Rend. Acc. Lincei, 1° sem. 1899.
41. « Recensione dell'opera 'Allgem. Untersuch. über. das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen mit bes. Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen' di C. Neumann ». Boll. Bibl. e Storia delle Sc. mat. Torino, 1999.
42. « Sul calcolo dell'errore medio di un angolo nel metodo delle combinazioni binarie ». Atti Acc. Torino, vol. XXXIV, 1899.
43. « Sulla correzione da fare alle latitudini osservate per tener conto dell'altezza dei punti di stazione sul livello del mare ». Rend. Circolo matem. Palermo, vol. XIV, 1900.
44. « Influsso della geodesia sul progredire delle scienze fisiche e matematiche ». Discorso per la solenne inaugurazione degli studî nella R. Università di Pisa letto il 5 novembre 1901, Pisa tip. Vannucchi. 1902.
45. « Un principio fondamentale nello studio delle superficie di livello terrestri ». Rend. Acc. Lincei, vol. X, ser. 5ª, 1901.
46. « Sopra alcune recenti determinazioni della gravità nell'Oceano atlantico ». Nuovo Cimento, serie V, vol. IV, 1902.
47. « Sullo stesso argomento ». Rivista di Topogr. e Catasto, vol. XV, Torino, 1902.
48. « Sulla teoria meccanica della figura dei pianeti ». Lezioni litografate, Pisa, 1902.
49. « Sopra alcune equazioni fondamentali nel problema degli n corpi ». Rend. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 38, 1903.
50. « Recensione del libro 'Wahrscheinlickeitsrechnung' di E. Czuber ». Boll. di St. e Bibl. della Soc. matem. Genova, 1903.

51. « Sull'impiego delle leghe di acciaio e nickel nella misurazione delle basi geodetiche ». Nuovo Cimento, ser. 5ª, vol. VI.
52. « Casi particolari del problema dei tre corpi ». Rend. Acc. Lincei, vol. XIII, ser. 5ª, 1904.
53. « Di alcuni casi di semplificazione nella compensazione delle reti geodetiche ». Rivista di Topogr. e Catasto, vol. XVI, 1904.
54. « Sur le problème des *n* corps alignés ». Mém. de la Sociedad « Antonio Alzate », Mexico, tom. XIX, 1903.
55. « Lezioni di geodesia teoretica ». Bologna, Zanichelli editore, 1905.
56. « Relazione fra i momenti d'inerzia di un corpo, del quale la funzione potenziale è simmetrica intorno ad un asse ». Rend. Acc. Lincei, vol. XIV, ser. 5ª, 1905.
57. « Notizie riassuntive intorno ai Rendiconti della XIV Conferenza dell'Ass. geodetica internazionale ». Riv. di Topogr. e Catasto, vol. XVII, 1905.
58. « Intorno al calcolo della rifrazione astronomica senza speciali ipotesi sul modo di variare della temperatura coll'altezza ». Rend. Acc. Lincei, XV, 1906.
59. « Sopra il grado di approssimazione nel calcolo dei triangoli geodetici ». Mem. Acc. Torino, LVII, 1906.
60. « Recensione dell'opera 'Wahrscheinlichkeits und Kollektivmasslehre di Bruns' ». Bollettino di Bibl. e St. delle Sc. mat., 1906.
61. « Sulla questione della più conveniente lunghezza dei lati dei triangoli geodetici ». Rend. del Circ. mat. Palermo, XXII, 1906.
62. « Paragone fra due triangoli geodetici di eguali lati ». Rend. Acc. Lincei, gennaio, febbr. ed apr, 1907 e Rend. Circ. matem. Palermo, XXIII, 1907.
63. « Commemorazione del prof. G. B. Favero ». Rend. Acc. Lincei, febbraio 1907.
64. « Höhere Geodäsie ». Monografia nella Encyklopädie der Math. Wissenschaften ecc., vol. VI, I, 3.
65. « A proposito di una asserzione di G. B. Airy ». Rivista di Astron. e Scienze affini, Torino, I, 1907.
66. « Le misurazioni fisiche e la teoria degli errori d'osservazione ». Riv. di Scienze, anno I, fasc. 3.
67. « Recensione dell'opera 'Die Ausgleiungsrechnung' etc. di F. R. Helmert ». Bollet. di St. e Bibl. delle Scienze mat. Torino, 1907.
68. « Sulla dimostrazione di un teorema fondamentale nel calcolo delle probabilità ». Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLIII, 1908.
69. « Intorno ad un preteso errore di Galileo » Rivista di Astronomia e Scienze affini, anno 2°, 1908.
70. « L'astronomia e la geodesia come Scienze matematiche » Discorso pronunciato nel congresso della Soc. Ital, pel progr. d. Scienze, 2ª riunione, Firenze, 1908.
71. « La massima deviazione accidentale e le osservazioni del tenente Mazzuoli sui risultati dei tiri ». Rend. Acc. Lincei, XVII, 1908.
72. « Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera ». Rend. Acc. Lincei, XVIII, 1909.
73. « Sul significato geometrico del 2° parametro differenziale sopra una superficie qualunque ». Rend. Acc. Lincei, XVIII, 1909.
74. « Corpi equivalenti rispetto alla attrazione Newtoniana esterna ». Rend. Acc. Lincei, XVIII, 1909.
75. « Recensione della Memoria del prof. Venturi sulla bilancia di torsione di Eötvös ». Riv. di Astr. e Sc. affini, 1909, n. 6.
76. « Sul teorema di Malus pei raggi luminosi curvilinei ». Rend. del Circ. mat. Palermo, tomo XXX.

77. « Tabelle grafiche per la risoluzione approssimata di una equazione di Gauss ». Pisa, fratelli Nistri, 1910.
78. « Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della Terra ». Annali di matematica, tomo XVII, ser. III, Milano, 1910.
79. « Dichiarazione della commissione per lo studio del campanile di Pisa in risposta all'architetto W. H. Goodyear ». Pisa, successori fratelli Nistri, 1910.
80. « Commemorazione di Roberto Daublebsky von Sterneck ». Rend. R. Acc. Lincei, vol. XX, ser. 5ª, 1911.
81. « Cenno sull'opera scientifica di R. D. v. Sterneck ». Riv. Astr. e Sc. affini, vol. V, 1911.
82. « Sopra il calcolo teorico delle deviazioni del Geoide dall'Ellissoide ». Atti R. Acc. Sc. Torino, vol. XLVI, 1911.
83. « Sopra un procedimento di Helmert in un particolar caso di applicazione del metodo dei minimi quadrati ». Rend. R. Acc. Lincei, vol. XX, ser. 5ª, 1911.
84. « Rilevamento ottico del campanile di Pisa ». Annali della società Ing. e Arch. italiani, Roma, 1912.
85. « Principî della teoria meccanica della figura dei pianeti », pag. XIV, 251, Pisa, E. Spoerri, 1913.
86. « Commemorazione del Socio straniero Georgio Howard Darwin ». Rend. R. Accad. Lincei, marzo 1913.
87. « Della probabilità nelle prove ripetute ». Rend. Acc. Lincei, vol. XXIII, 1914.
88. « Generalizzazione di alcune formole di Sundman ». Giorn. di Battaglini, 1915.
89. « Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili ». Rend. Acc. Lincei, 2° semestre 1915.
90. « Sul moto di rotazione della Terra; a proposito di una recente comunicazione del prof. Cerulli ». Rend. Acc. Lincei, 1° sem. 1917.
91. « A proposito di una recente Nota del prof. Almansi ». Rend. Acc. Lincei, 1° semestre 1917,
92. « Geometria delle superficie e geometria della sfera ». Rend. Acc. Lincei, 2° sem. 1917.

Il Socio senatore Fano aggiunge affettuosissime parole per onorare l'esimio estinto che aveva avuto collega nell'Università di Genova.

Il Presidente comunica che hanno inviato ringraziamenti all'Accademia per la loro recente elezione, i Soci stranieri: Baillaud, Borel, Dyson, Goursat, Hadamard, Haller, Langley, Lallemand, Le Chatelier, Lindet.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 maggio 1918.

De Angelis d'Ossat G. — Applicazioni della geologia. Altri esperimenti sull'evaporazione dei terreni (Dry-farmino) (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. 41, pp. 41-55. Modena, 1918. 8°.

Leone S. — La lotta contro il « Tracoma » nella Provincia di Siracusa, XIII relazione (1917-1918). Un primo esperimento di profilassi visiva. Siracusa, 1917. 8°, pp. 1-32-1-10.

Loria G. — Guglielmo Libri come storico della scienza (Estr. dagli « Atti della Società Ligustica di Scienze nat. e geogr. », vol. XXVIII, pp. 1-35). Genova, 1918. 8°.

Marcotta C. — La guarigione rapida della scarlattina con l'« antiscarlattinosa Alecce » (Estr. dal « Giornale di medicina militare », pp. 1-8). Roma, 1918. 8°.

Parona C. F. — Nuovi fossili del miocene di Rosignano Piemonte (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LI, pp. 1-8). Torino, 1916. 8°.

Parona C. F. — Saggio bibliografico sulle Rudiste con indici dei nomi di autore, di genere e di specie (Estr. dal « Bollettino del R. Comitato geologico d'Italia », vol. XLVI, pp. 1-78). Roma, 1917. 8°.

Parona C. F. — Notevole deformità nell'apparato cardinale di un Ippurite (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». vol. LII, pp. 581-588). Torino, 1917. 8°.

Parona C. F. — Del contributo portato alla litogenesi dai piccoli organismi (Estr. dalla Rivista di Scienze naturali « Natura », vol. VIII, pp. 174-205). Pavia, 1917. 8°.

Parona C. F. — Commemorazione di Francesco Bassani (Estr. dal « Bollettino del R. Comitato geologico d'Italia », vol. XLVI, pp. 89-102). Roma, 1917. 8°.